Podstawy kryptografii

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

sem. letni 2024/2025

inf.ug.edu.pl/~amb/

Schematy podpisu cyfrowego

Podpis cyfrowy, podstawy

- Cel: (1) przekonać odbiorcę o autentyczności dokumentu
  – dodatkowo, (2) przekonać też stronę trzecią
  – czyli atrybut niezaprzeczalności
- W kryptografii symetrycznej (1) jest łatwe:
  Alicja i Bolek mają wspólny tajny klucz, Bolek wie, że dokument zaszyfrowany musi pochodzić od Alicji
  mogą użyć MAC by uniemożliwić manipulację kryptogramem
  – (2) nie jest spełnione
  i Alicja i Bolek mogą sporządzić ten sam dokument, sąd nie ma podstaw wierzyć Bolkowi, że autorem jest Alicja a nie Bolek
- Cechy (pożądane): (1) niemożność sfałszowania podpisu
  – (2) niemożność przeniesienia podpisu z innego dokumentu
  – (3) niemożność zmiany podpisanego dokumentu
  – dodatkowo: łatwość identyfikacji osoby składającej podpis, łatwość weryfikacji podpisu

Podpis cyfrowy, kryptografia symetryczna

- Protokół z kluczem symetrycznym:
  – zaufany arbiter Tadeusz zna tajne klucze wszystkich uczestników
  – Alicja przesyła zaszyfrowany dokument do arbitra z informacją, że adresatem jest Bolek: $\langle K_A(M), B\rangle$
  – ten odszyfrowuje, szyfruje i przesyła do Bolka z informacją o autorze: $K_B(\langle M, A\rangle)$
  – albo przesyła $K_B(\langle M, A\rangle)$ do Alicji, by to ona przesłała
  – Bolek wierzy Tadeuszowi, że wiadomość jest od Alicji, w razie potrzeby powoła się na Tadeusza, który jest powszechnie szanowany
- Problem: potrzebny jest zaufany pośrednik,
  – zna on wszystkie klucze (niebezpieczeństwo kompromitacji)
  – podpis jest przeznaczony tylko dla jednego odbiorcy – duże wymagania obliczeniowe
  – (ale można operować wyłącznie na skrótach)

Szyfrowanie a podpis cyfrowy w kryptografii asymetrycznej

- Dane są dwie funkcje: $F(k,\ldots)$ oraz $G(\ell,\ldots)$ wzajemnie odwrotne: dla wszystkich k,ℓ,m zachodzi $G(\ell,F(k,m))=m$
  – szyfrowanie: $F(k,\ldots)$ szyfruje kluczem publicznym k, $G(\ell,\ldots)$ odszyfrowuje kluczem prywatnym ℓ
  – podpis: $F(k,\ldots)$ podpisuje kluczem prywatnym k, $G(\ell,\ldots)$ weryfikuje kluczem publicznym ℓ, $G(\ell,F(k,m))==m$
  – albo podpis $G(\ell,\ldots)$ i weryfikacja za pomocą $F(k,\ldots)$
- Czy to zawsze możliwe?:
  – klucze niekoniecznie można zamieniać rolami
  – operacje z kluczem publicznym i prywatnym nie muszą być przemienne

Podstawy kryptografii
Andrzej Borzyszkowski
Schematy podpisu cyfrowego
Podpis cyfrowy
RSA
Podpis skrótu
Schemat ElGamala
DSA

Podpis cyfrowy w kryptografii asymetrycznej

- Para kluczy, prywatny i publiczny (s,p)
  – podpisywanie kluczem prywatnym może być niedeterministyczne, $Sig(s,m)$
  – weryfikacja kluczem publicznym musi dawać wynik T/F, $V(p,Sig(s,m))=T$, $V(p,m_1)=F$ jeśli m_1 nie jest postaci $Sig(s,m)$ dla pewnego m.
  – osobny problem, czy znajomość $Sig(s,m)$ zapewnia znajomość m, jeśli nie, to m musi byc przesyłane niezależnie od $Sig(s,m)$

Podstawy kryptografii
Andrzej Borzyszkowski
Schematy podpisu cyfrowego
Podpis cyfrowy
RSA
Podpis skrótu
Schemat ElGamala
DSA

Podpis cyfrowy a MAC

MAC	**Podpis cyfrowy:**
odbiorca musi mieć wspólny klucz z nadawcą	każdy może zweryfikować podpis
dla każdego odbiorcy musi być odrębny MAC	dokument jest podpisany raz dla wszystkich
odbiorca sam ma pewność, ale nie może jej przekazać	weryfikacja jest dostępna wszystkim
MAC nie wiąże się ze zobowiązaniem	podpisu nie można się wyprzeć (jeśli z góry ustalono związek z kluczem publicznym)

Podstawy kryptografii
Andrzej Borzyszkowski
Schematy podpisu cyfrowego
Podpis cyfrowy
RSA
Podpis skrótu
Schemat ElGamala
DSA

Podpis cyfrowy w kryptografii asymetrycznej – bezpieczeństwo

- Scenariusze ataku:
  – Mariola zna klucz publiczny
  – Mariola zna pewną liczbę podpisanych komunikatów
  – Mariola ma dostęp do urządzenia podpisującego (i potrafi podpisywać wiadomości inne niż ta, którą chce podpisać)
- Możliwości powodzenia ataku:
  – Mariola potrafi złożyć podpis pod każdą wiadomością (pełne złamanie klucza)
  – Mariola potrafi złożyć podpis pod pewną ustaloną wiadomością
  – Mariola potrafi przedstawić jakąś podpisaną wiadomość (wcześniej nie podpisaną przez urządzenie – fałszerstwo egzystencjalne)
  – nie wiemy, czy ta wiadomość jest jej przydatna
- Bezwarunkowe bezpieczeństwo: nie istnieje, zawsze można przetestować wszystkie podpisy, ale jest to nierealne

Algorytm RSA

- Przygotowanie Alicji:
  – wybiera duże liczby pierwsze p i q, oblicza $N = p \cdot q$
  – wybiera e i d takie, że $e \cdot d = 1 \mod \varphi(n)$,
  $\varphi(n) = (p-1) \cdot (q-1)$
  – klucz publiczny: (N, e)
  – klucz prywatny: (N, d)
- Podpis Alicji:
  – przesyła do Bolka $S((N,d),m) = m^d \mod N$,
  m musi spełniać $m < N$, $NWD(m,N) = 1$
- Weryfikacja przez Bolka:
  – pobiera klucz publiczny Alicji
  – oblicza $V((N,e),s) = s^e = m^{d \cdot e} = m^{(1+\lambda \cdot \varphi(n))} = m \mod N$
  – znajduje m i przekonuje się, że tylko właścicielka klucza prywatnego była w stanie tak zaszyfrować
- Każdy może przeprowadzić same kroki co Bolek

Słabości RSA

- Nieodporność na fałszerstwo egzystencjalne
  – Mariola może wybrać dowolne y, obliczyć $m = y^e \mod N$ i twierdzić, że Alicja podpisała wiadomość m rzeczywiście $m^d = y$
  – co prawda wiadomość m będzie prawie na pewno bezsensowna, ale będzie podpisana kluczem prywatnym d
- Nieodporność na fałszerstwo z wybranym tekstem
  – Mariola zdobywa dwa podpisy na wiadomościach m_1 oraz $m_2 = \frac{m}{m_1}$ i łatwo oblicza podpis m: $m^d = m_1^d \cdot m_2^d$
  – podpis pod nieznanymi dokumentami musi być stosowany ostrożnie
  – ale jest stosowany w różnych protokołach uwierzytelniania
  – okaże się zaraz, że raczej nie podpisujemy wprost iloczynów i ilorazów liczb

RSA, podpis ślepy

- Bolek chce podpisu Alicji pod dokumentem m jej nieznanym
  – np. patent w biurze patentowym
- Algorytm Chauma
  – Alicja przygotowuje parę kluczy, $\langle N, e \rangle$, $\langle N, d \rangle$ i ujawnia klucz publiczny $\langle N, e \rangle$
  – Bolek wybiera losowe k i przesyła do podpisu $m \cdot k^e \mod N$
  – Alicja podpisuje $y = (m \cdot k^e)^d = m^d \cdot k \mod N$
  – Bolek oblicza $m^d = y/k \mod N$ – otrzymuje dokument m podpisany kluczem prywatnym Alicji
- Alicja nie wie co podpisała
  – wniosek: taki podpis może być składany jedynie za pomocą pary kluczy przeznaczonej do składania podpisu ślepego

Podpis skrótu jako zasada ogólna

- Kryptografia asymetryczna jest mało wydajna
  – dokumenty są znacząco dłuższe niż tysiące bitów
  – rozwiązanie: podpisywanie jedynie skrótu dokumentu
  – sam dokument nie da się odtworzyć z podpisanego skrótu, musi być dołączany do przesyłki
- Tw.: jeśli schemat podpisu jest bezpieczny oraz skrót jest bezkolizyjny, to schemat podpisu skrótu jest bezpieczny
  – nie da się utworzyć podpisanego skrótu
  – nie da się znaleźć dwóch dokumentów o tym samym skrócie (podpis skrótu byłby automatycznie podpisem obu)
- Uwaga: bezpieczeństwo wymaga silnej bezkolizyjności
  – dwa dokumenty o tym samym skrócie mają ten sam podpis
  – funkcje md5 oraz SHA-1 nie nadają się do podpisu
- Podpis skrótu powoduje, że podpisywana wiadomość musi być przekazana, nie da się jej odtworzyć ze skrótu

Funkcje skrótu - atak urodzinowy

- Prawdopodobieństwo, że dwie osoby spośród n osób mają urodziny tego samego dnia
  – dla $n \geqslant 22$ jest $> \frac{1}{2}$
- Prawdopodobieństwo, że dwie spośród r losowych liczb z zakresu $0 \ldots n$ są równe jest $1 - e^{\frac{-r^2}{n}}$
  – jeśli zakres jest 50 bitowy, to wystarczy wygenerować 2^{30} liczb by praktycznie na pewno było powtórzenie
- Alicja przygotowuje dwie wersje dokumentu, w każdej dokonuje 2^{30} małych modyfikacji, znajduje dwie wersje o identycznej funkcji skrótu i prosi Bolka o podpisanie jednej wersji
  – jest to również podpis pod drugą wersją
  – de facto fałszuje podpis Bolka
- Funkcje skrótu powinny być dwa razy dłuższe niż się wydaje
- Bolek może przed podpisaniem dokonać małej modyfikacji

Podpis skrótu w RSA

- Podpisany dokument: $\langle m, H(m)^d \mod N \rangle$
  – weryfikacja: czy $H(m) = s^e \mod N$?
- Fałszerstwo egzystencjalne
  – po obliczeniu $s^e \mod N$ dla dowolnego s trzeba jeszcze znaleźć m tak by $H(m) = s^e$ – zadanie praktycznie niewykonalne
- Fałszerstwo z dwoma podpisami
  – iloczyn dwóch skrótów w ogóle nie będzie skrótem, nie zgadza się długość
- Nie ma jednak dowodu, że podpis RSA nawet z bezkolizyjnym skrótem jest bezpieczny

Schemat ElGamala

- Przygotowanie Alicji:
  – wybiera liczbę pierwszą p, generator g, wykładnik $a < p-1$
  – klucz publiczny: $(p, g, \alpha = g^a \mod p)$
  – klucz prywatny Alicji: a
- Alicja podpisuje wiadomość $m < p$:
  – losuje k, t.ż. $NWD(k, p-1) = 1$,
  – oblicza $r = g^k \mod p$ oraz $s = k^{-1} \cdot (m - a \cdot r) \mod p-1$
  – podpisem jest cała trójka $\langle m, r, s \rangle$
- Bolek weryfikuje podpis na podstawie klucza publicznego:
  – sprawdza równość $\alpha^r \cdot r^s = g^m \mod p$
- Uzasadnienie: $s \cdot k + a \cdot r = m \mod p-1$
  – a więc $g^m = g^{s \cdot k + a \cdot r} = r^s \cdot \alpha^r \mod p$
- Niedeterminizm:
  – ta sama wiadomość może mieć wiele różnych podpisów

Schemat ElGamala, bezpieczeństwo

- Mariola chce sfałszować podpis pod inną wiadomością m
  – k jest dowolne, więc r też, α jest znane, szuka s takiego, że $\alpha^r \cdot r^s = g^m \mod p$
  – czyli rozwiązuje problem logarytmu dyskretnego $r^s = \alpha^{-r} \cdot g^m \mod p$
  – może zacząć od wyboru s i szukać r, ale to też sprowadzi się do problemu logarytmu dyskretnego
- Nie wiadomo, czy wspólne szukanie r i s ułatwi zadanie

Schemat ElGamala, losowość

- Alicja podpisała dwie wiadomości m_1 i m_2 z tą samą wartością losową k
  – a więc część r w obu podpisach jest identyczna
  – Ewa widzi to i wie, że $s_1 \cdot k - m_1 = s_2 \cdot k - m_2 \mod p-1$
  – czyli $(s_1 - s_2) \cdot k = m_1 - m_2 \mod p-1$
  – k daje się obliczyć, być może niejednoznacznie
  – z równania $a \cdot r = m_1 - k \cdot s_1 \mod p-1$ można obliczyć a, również być może jest kilka rozwiązań
- Tzn. system jest całkowicie skompromitowany, znany jest klucz prywatny i można fałszować wszystkie podpisy

Dlaczego logarytm dyskretny?

- Dane dwie funkcje: $F(k,\ldots)$ oraz $G(\ell,\ldots)$ t.ż. dla wszystkich k, ℓ, m zachodzi $G(\ell, F(k,m)) = m$
  – $F(k,\ldots)$ jest podpisem kluczem prywatnym k, $G(\ell,\ldots)$ weryfikuje kluczem publicznym ℓ tzn. $G(\ell, F(k,m)) = m$?
- Algorytmu do podpisu można użyć do szyfrowania jeśli będzie spełniony jeden z warunków
  – klucze można zamienić rolami
  – operacje z kluczem publicznym i prywatnym są przemienne
- RSA spełnia każdy z warunków
  – $e \cdot d = 1 \mod \varphi(N)$, dowolna z nich może być tajna
  – obie operacje są potęgowaniem, kolejność potęgowania jest dowolna
- Algorytm ElGamala dla podpisu jest inny niż dla szyfrowania
  – narzędzie do podpisu nie daje narzędzia do szyfrowania

Digital Signature Algorithm

- Standard opracowany w 1991 r. przyjęty w 1994 r.
- Opiera się na problemie logarytmu dyskretnego
  – a więc nie da się bezpośrednio użyć do szyfrowania
  – wymaga przekazania oryginału wiadomości (jak ElGamal)
- Algorytm jest bardziej skomplikowany
  – lecz szybszy w działaniu (dwa potęgowania zamiast trzech przy weryfikacji)
  – bezpieczniejszy, wymaga by $p-1$ miało duży dzielnik pierwszy
- częścią standardu jest funkcja skrótu SHA-1 specjalnie zaprojektowana z tej okazji
  – zastąpiona najpierw przez SHA-2, a obecnie przez SHA-3
  – dziś SHA-1 ma znalezione kolizje i nie powinna być stosowana do podpisu
- Formalnie, nie ma żadnego dowodu bezpieczeństwa schematu