Kryptografia i bezpieczeństwo systemów informatycznych

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

sem. letni 2023/2024

inf.ug.edu.pl/~amb/

Szyfry blokowe

Funkcje pseudolosowe

- Ozn.: $[n]$ – zbiór ciągów bitów długości n, $\oplus$ dodawanie bitów mod 2
- Dana funkcja $F : [n] \times [n] \to [n]$, $F(k, m)$ – klucz i wiadomość
  – obliczalna PPT
  – problem, czy funkcję jednej zmiennej $F(k, \_)$ da się odróżnić od losowej funkcji $f : [n] \to [n]$?
  – funkcji pierwszego typu jest tylko 2^n, drugiego typu $(2^n)^{2^n}$
  – sam zapis funkcji $f : [n] \to [n]$ wymaga wykładniczych zasobów
  – jeśli f jest losowa, to wartości $f(x)$ oraz $f(y)$, $x \neq y$, są niezależne
- Funkcja F jest pseudolosowa, jeśli przeciwnik o zasobach PPT nie odróżni $F(k, \_)$, k losowe, od losowej funkcji f
  – nawet nie zna całej funkcji
  – korzysta jedynie z wyroczni obliczającej wartości funkcji
  – tzn.: podobnie jak w ataku z wybranym tekstem jawnym

Wykorzystanie funkcji pseudolosowych

- Metoda naiwna
  – $Enc(k, m) = F(k, m)$
  – nie ujawnia niczego o tekście
  – ale jest deterministyczna, nie może być bezpieczna przeciwko atakowi z wybranym tekstem jawnym czy z zestawem tekstów jawnych
- Metoda słuszna
  – generowanie klucza: losowy wybór
  – funkcja szyfrowania: $Enc(k, m) = \langle r, F(k, r) \oplus m \rangle$, r jest losowo wybranym ciągiem $r \in [n]$
  – funkcja odszyfrowania: $Dec(k, \langle r, c \rangle) = F(k, r) \oplus c$
  – r nie może pojawić się powtórnie, prawdopod. tego błędu jest zaniedbywalnie małe
- Tw.: jeśli funkcja jest pseudolosowa, to powyższy szyfr jest bezpieczny przeciwko atakowi z wybranym tekstem jawnym

Permutacje pseudolosowe

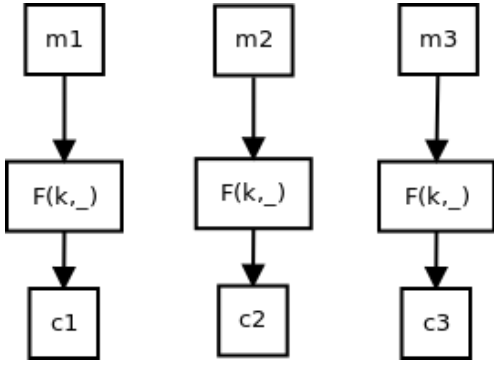
- Funkcja $F : [n] \times [n] \to [n]$, jest permutacją z kluczem, jeśli każda $F(k, \_)$ jest bijekcją
  – jest efektywna, jeśli istnieją algorytmy PT obliczające $F(k, \_)$ oraz funkcję odwrotną
- F jest pseudolosową permutacją, jeśli jest nieodróżnialna od losowych permutacji
  – równie dobrze jest nieodróżnialna od losowych funkcji
- Można żądać więcej, by $F(k, \_)$ oraz funkcja odwrotna były nieodróżnialne od losowych permutacji

Tryby szyfrów blokowych

- Konieczność szyfrowania tekstów jawnych dłuższych niż blok
  – tekst jawny jest ciągiem bloków P_j, szyfrogram bloków C_j, $j = 1, 2, \ldots$
  – być może trzeba wypełniać ostatni blok
  - standardowa metoda:
  jeśli zabraknie jednego bajta, to wpisujemy ascii 1
  jeśli dwóch, to dwa bajty ascii 2, itd.
  jeśli nie ma potrzeby uzupełniania, to dodajemy cały blok z ascii 0
  gdyby nie dodawać pustego bloku, to nie odróżnilibyśmy np. tekstu jawnego z ostatnim bajtem równym 1 od tekstu o jeden bajt krótszego

Tryby: ECB

- ECB (*electronic code book*)
  – każdy blok szyfrowany jest niezależnie:
  $c_j = Enc(k, m_j)$, $m_j = Dec(k, c_j)$
  – daje to szyfr deterministyczny $Enc(k, m) = F(k, m)$

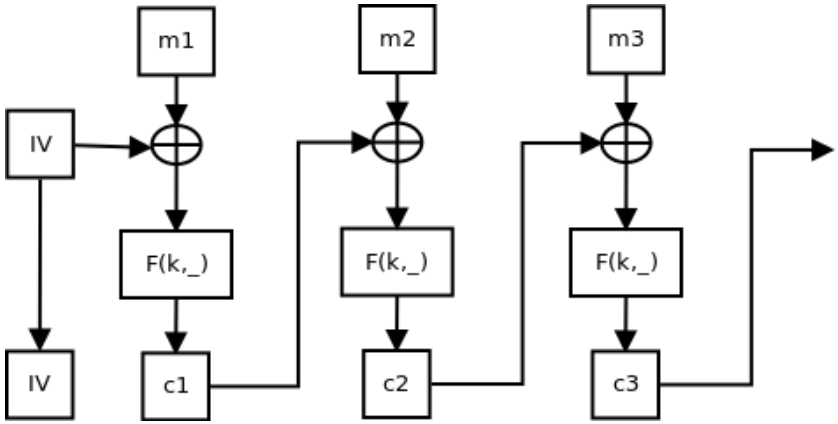


Własności ECB

- Jest to szyfr deterministyczny $Enc(k, m) = F(k, m)$
  – gdyby $Enc(k, m) = \langle r, F(k, r) \oplus m \rangle$
    - trzeba by dużej liczby losowych wektorów,
    - szyfrogram byłby dwa razy dłuższy niż tekst jawny
- Zalety:
  – niezawodność,
  – łatwość szyfrowania fragmentów (baza danych, zawartość dysku)
- Wady:
  – brak bezpieczeństwa każdego rodzaju, Ewa może rozpoznać, która z wiadomości została zaszyfrowana
  – niebezpieczeństwo rozpoznania stałych fragmentów, niebezpieczeństwo manipulacji fragmentami szyfrogramu
  – nie powinien być stosowany w ogóle

Tryby: CBC

- CBC (*cipher block chaining*)
  – $c_j = Enc(k, m_j \oplus c_{j-1})$, $m_j = Dec(k, c_j) \oplus c_{j-1}$, $c_0 = IV$
  – takie same fragmenty tekstu są szyfrowane odmiennie

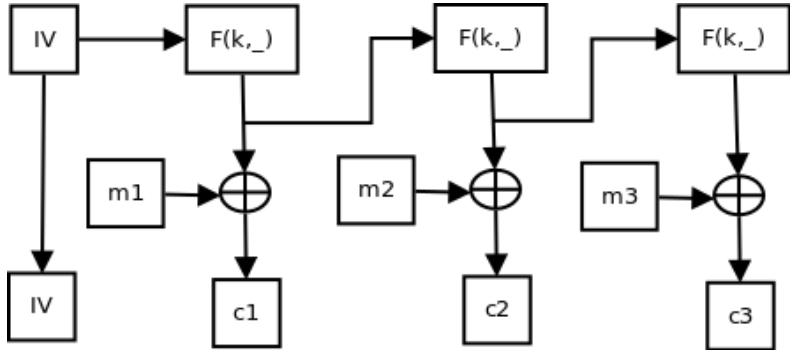


Własności CBC

- Zalety:
  – jeśli F jest permutacją pseudolosową, a wektor początkowy jest losowy, to szyfr jest bezpieczny na atak z wybranym tekstem jawnym
- Wady:
  – przetwarzanie musi być sekwencyjne, nie ma szansy na wykorzystanie ew. równoległości obliczeń
  – błąd w jednym bicie kryptogramu powoduje błąd w dwóch odszyfrowanych blokach

Tryby: OFB

- OFB (*output feedback*)
  – strumień pseudolosowy jest generowany z szyfru blokowego:
  $r_j = Enc(k, r_{j-1}), r_0 = IV$
  – szyfrowanie i odszyfrowywanie: $m_j \oplus r_j$, $c_j \oplus r_j$

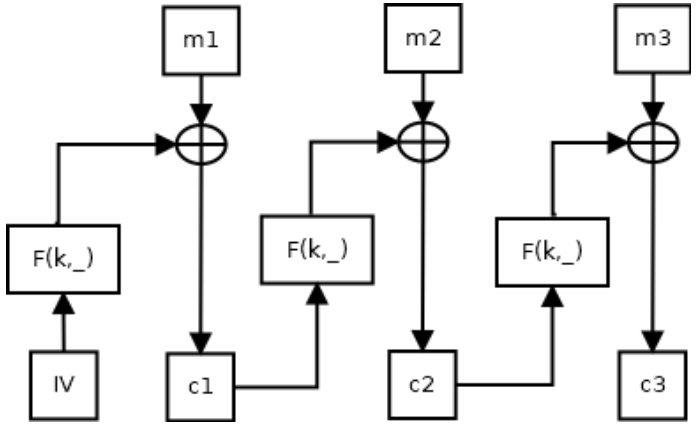


Własności OFB

- Zalety:
  – błędy w szyfrogramie nie propagują się wcale
  – ciąg r_j można przygotować przed otrzymaniem szyfrogramu
  – jeśli F jest funkcją pseudolosową, to szyfr jest bezpieczny na atak z wybranym tekstem jawnym
  – pod warunkiem, że wektor początkowy jest losowy
  – F nie musi być permutacją
- Wady:
  – nie można wykorzystać przetwarzania współbieżnego

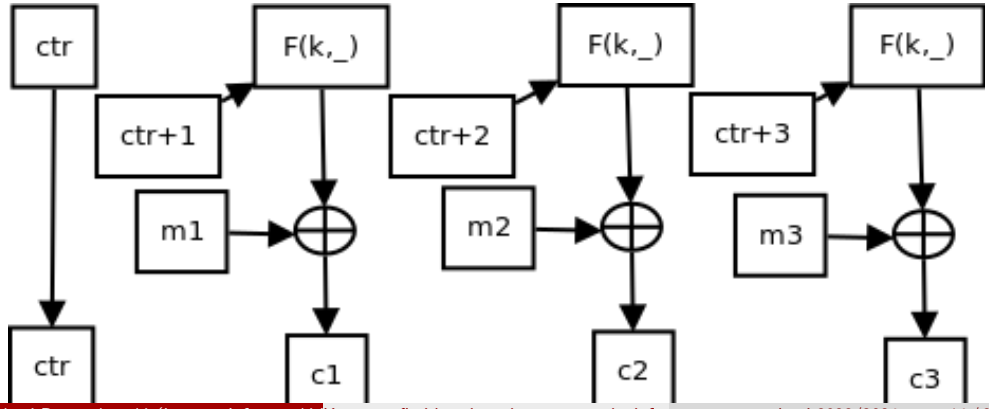
Tryby: CFB

- CFB (*cipher feedback*)
  – $c_j = m_j \oplus Enc(k, c_{j-1})$, $m_j = c_j \oplus Enc(k, c_{j-1})$, $c_0 = IV$
- cechy podobne do CBC, sekwencyjne przetwarzanie, ew. błąd propaguje się na dwa bloki



Tryby: CTR

- CTR (*counter*)
  – strumień pseudolosowy jest generowany z szyfru blokowego: $r_j = Enc(k, ctr + j)$, $ctr = IV$
  – rejestr jest licznikiem, umożliwia działanie współbieżne
  – można szyfrować niezależne fragmenty



Szyfry blokowe

- Bezpieczeństwo zależy od wielkości bloku
  – mniejszy blok zwiększa szansę na powtórzenie wektora losowego
  – $2^{połowa\ długości\ bloku}$ powinno być dużą liczbą
  – blok 64 bitowy dzisiaj jest za mały
- Szyfr blokowy może działać jak szyfr strumieniowy
  – jedyną zaletą szyfru strumieniowego jest wydajność
  – dzisiaj jest to coraz mniej znaczące (może telefony?)

Atak z wybranym kryptogramem

- Ewa ma zgadnąć, która wiadomość jest zaszyfrowana
  – ale ma prawo żądać szyfrowania i odszyfrowania dowolnej wiadomości oprócz dwóch konkursowych
- W trybach OFB, CFB, CTR – kryptogram jest sumą teksty jawnego i pewnego ciągu
  – lekkie zaburzenie powoduje, że wynik jest zbliżony
- W trybie CBC zmiana bloku powoduje zmiany wszystkich dalszych, ale nie wcześniejszych
- Szyfr odporny na atak z wybranym kryptogramem powinien mieć własność odwrotną do odporności na zakłócenia
  – tzn. mała zmiana kryptogramu powoduje dużą zmianę lub niemożność odszyfrowania
- Atak z wybranym kryptogramem jest sens rozpatrywać, gdy przestrzeń tekstów jawnych czy kryptogramów jest ograniczona, może kilobajty, ale nie megabajty długości

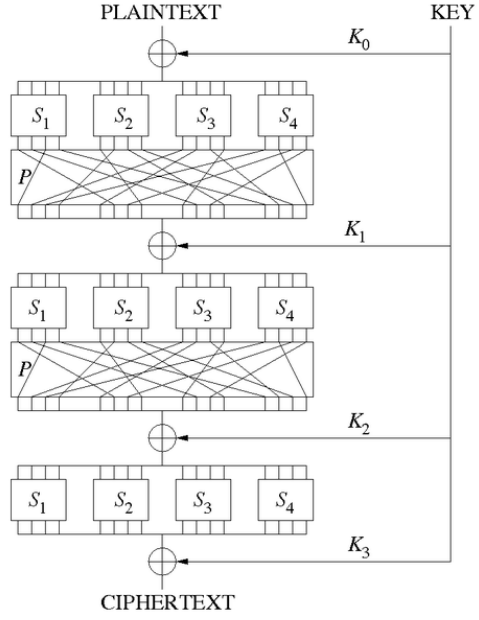
Implementacja szyfrów blokowych

Konfuzja i dyfuzja (Shannon)

- Konfuzja
  – de facto inna nazwa na permutację (bijekcję)
- Bijekcja $F(k, \_) : [n] \to [n]$ wymaga $\log(2^n!) \approx n \cdot 2^n$ bitów
  – nierealne dla $n = 64$
- Podział na mniejsze bloki, np.
  – $F(k, \langle x_1, \ldots, x_8 \rangle) = \langle F_1(k, x_1), \ldots, F_8(k, x_8) \rangle$, $x_i \in [8]$
  – dla $n = 64$ zamiast 2^{70} potrzeba $8 \cdot 8 \cdot 2^8 = 2^{14}$ bitów
  – na pewno nie jest pseudolosowa
  – bo zmiana jednego bitu powinna wpływać na wszystkie bity, nie tylko w obrębie bloku
- Dyfuzja
  – trzeba wymienić bity pomiędzy blokami
  – zmiana w jednym bloku wpływa na inne bloki

Sieć podstawień i permutacji

- Każda z bijekcji $F_i(k, x_i)$ ma postać $S_i(k \oplus x_i)$
  – bijekcje S_i są ustalone
  – nazwa: podstawienie, S-box
  – zależność od klucza jest taka jak w szyfrach strumieniowych
- Dyfuzja
  – przestawia bity, nazwa: permutacja, nie mylić z bijekcją na zbiorze ciągów bitów
- Operacje $\oplus$ z kluczem, zastosowanie S-boksu oraz permutacja bitów są wielokrotnie iterowane
  – klucze k_i dla różnych rund są generowane z klucza k



ŹRÓDŁO: WIKIPEDIA

Zasady budowy sieci podstawień i permutacji

- Odwracalność
  – konieczność odszyfrowywania
  – dodawanie klucza jest odwracalne
  – podstawienia muszą być permutacjami (matematycznie)
  – permutacja bitów musi być permutacją (matematycznie)
- Efekt lawiny
  – zmiana jednego bitu na wejściu może zmienić każdy bit na wyjściu
  – w każdym S-boksie musi zmienić co najmniej dwa bity
  – te dwa bity są przekazane do dwóch różnych S-boksów
  – liczba rund musi być wystarczająco duża

Ataki na sieci podstawień i permutacji

- Jedna runda
  – szyfr bezwartościowy, jedna para tekst jawny+kryptogram ujawnia klucz
- Dwie rundy
  – z góry wiadomo do jakich S-boksów wędrują zmiany na wejściu
  – np. dla bloku 64 bitowego i 4 bitowych S-boksów trzeba wypróbować $2^{16} \cdot 2^4$ kluczy i powtórzyć to 2^7 razy
  – złożoność ataku 2^{27} – dużo za mało
- Trzy rundy
  – na pewno można odróżnić od permutacji losowej
  – bo zmiany bitów ujawniają się w z góry znanych miejscach

Sieci Feistela

- Przekształcenie Feistela
  – niech $f : [\ell] \times [n] \to [n]$ jest dowolną funkcją, definiujemy $F(k, \langle x, y\rangle) = \langle x, y \oplus f(k, x)\rangle$, $F : [\ell] \times [2n] \to [2n]$
  – wówczas $F(k, F(k, \langle x, y\rangle)) = \langle x, y \oplus f(k, x) \oplus f(k, x)\rangle = \langle x, y\rangle$, tzn. F jest odwrotna do siebie
  – w praktyce lepiej zamienić argumenty $F(k, \langle y, x\rangle) = \langle x, y \oplus f(k, x)\rangle$ funkcja odwrotna zaczyna od zamiany, wielokrotne złożenie F jest mocno mieszające: $x, y \oplus f(k, x), x \oplus f(k, y \oplus f(k, x)), \ldots$
- Sklejanie i rozkład bloków
  – blok $2n$ bitów to dwa bloki n–bitowe
  – $L_i = R_{i-1}$, $R_i = L_{i-1} \oplus f_i(R_{i-1})$, f_i może zależeć od rundy
  – odwrotne odwzorowanie ma podobny wzór
- Funkcja f nie musi być bijekcją

DES (Data Encryption Standard)

- IBM, 1974
  – pierwsza wersja Lucifer
  – wersja obecna, 1975, standard od 1977
  – stracił pozycję w 2000, ale do dziś używany
- Szyfr blokowy (64 bitowy)
  – w pełnej wersji wymaga zdefiniowania trybu użycia szyfru blokowego
  – oparty o sieć Feistela
- Klucz 56 bitowy
  – dzisiaj możliwe jest złamania brutalne, ale nie jest to trywialne
- Nie znaleziono innego ataku na ten szyfr
  – świadczy to o doskonałości projektu

Trzy składniki DES–a

- Permutacja rozszerzająca: $[n] \to [m]$, $m \geqslant n$, zapisywana jest w postaci tabeli o m pozycjach o wartościach $1, .., n$, np. 12434356 pokazuje jak przenieść 6 bitów na 8 bitów wyjściowych
- S-box (*substitution box* – tabelaryczny zapis funkcji)
  – $S : [m] \to [n]$, $m \geqslant n$
  – w tabeli jest 2^m pozycji, każda zapisywana n bitami
  – np. 101, 010, 001, 110,
    011, 100, 111, 000,
    001, 100, 110, 010,
    000, 111, 101, 011
  – jest to S-box $[4] \to [3]$, każda wartość na wyjściu powtarza się dokładnie 2 razy
- Klucze dla rund, np. z klucza $x_1, \ldots, x_9$ ciąg dziewięciu kluczy 8-bitowych: każdy zaczyna się od kolejnego bitu

„mini DES"

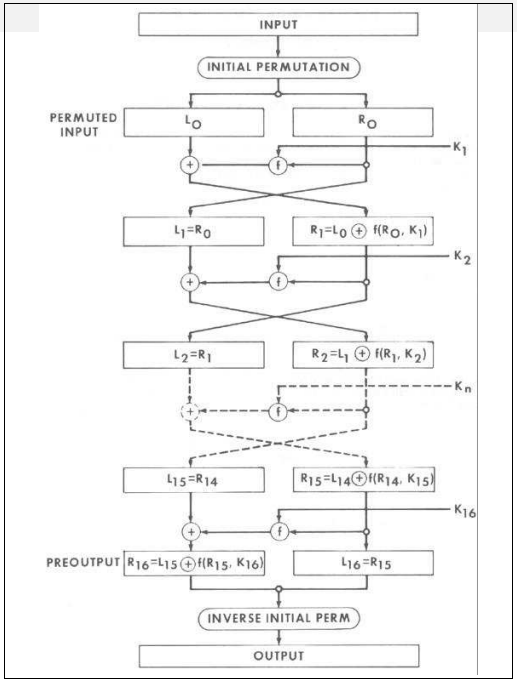
- Bloki są 12 bitowe
  – dzielone są na dwa po 6 bitów, L_0, R_0
- W jednej rundzie $L_i = R_{i-1}, R_i = L_{i-1} \oplus f(k_i, R_{i-1})$
- Występuje wiele rund, w ostatniej jeszcze zamiana L_n i R_n
- Więc odwzorowanie odwrotne ma klucze w odwrotnej kolejności, poza tym jest identyczne
- $f : [8+6] \to [6]$ jest zdefiniowane $f(k, R) = S_1 \times S_2(E(R) \oplus k)$, gdzie
  – $E : [6] \to [8]$ jest ustaloną permutacją rozszerzającą
  – k jest kluczem 8–bitowym, innym dla każdej rundy
  – S_1 i S_2 są dwoma ustalonymi S–boksami, tzn. funkcjami $[4] \to [3]$
  – blok 8-bitowy jest dzielony na dwa, każda z funkcji jest stosowana osobno, wyniki są sklejone do bloku 6 bitów

Prawdziwy DES

- Bloki są 64 bitowe, występuje 16 rund
- Klucz jest 56 bitowy, podzielony na dwa bloki C_0, D_0
  – w każdej rundzie nowe bloki są $C_i = P_i(C_{i-1})$, podobnie D_i
  – P_i jest przesunięciem bitów o jeden lub dwa bity (określa to tabela 1122222212222221 – 1, 2, 9 i ostatnia runda ma przesunięcie o 1)
  – z 56 bitów wybieranych jest 48 według ustalonego wzorca
- Na wstępie wykonywana jest dodatkowa ustalona permutacja na zakończenie permutacja odwrotna
- $f : [48+32] \to [32]$ wykorzystuje ustaloną permutację rozszerzającą $E : [32] \to [48]$, osiem S-boksów $[6] \to [4]$ i dodatkową ustaloną permutację bitów na koniec:
  – $f(R, K) = C(S_1 \times \ldots \times S_8(E(R) \oplus K))$
- Permutacje bitów, S-boksy, przesunięcia klucza są częścią standardu

DES

- rysunek z dokumentu FIPS46–3, czyli standardu opisującego DES



Zasady projektu DES

- S–boksy są funkcjami dalekimi od liniowych
  – jeśli na wejściu do S–boksu jest różnica jednego bitu, to na wyjściu różnią się dwoma bitami
  – ustalamy ciąg 6 bitów z i rozpatrujemy 32 pary (x, y) takie, że $x \oplus y = z$ obliczamy $Sx \oplus Sy$, najwyżej 8 par ma prawo dać ten sam wynik
  – utrudnia/uniemożliwia to kryptoanalizę różnicową
- Permutacja na początku i na końcu – nie wiadomo dlaczego!
- Tw.: DES nie jest grupą, tzn. $E(k_1); E(k_2)$ nie jest szyfrowaniem DES (w przeciwieństwie do szyfru Cezara, afinicznego, Hilla)
- dyfuzja: zmiana jednego bitu w tekście jawnym zmienia dużo w szyfrogramie (ok. połowy bitów w bloku)

Atak na DES – brutalne przeszukiwanie

- Pierwsze wątpliwości (za krótki klucz) natychmiast, 1975
- Zatwierdzenie standardu w 1983, 1988 i 1993
- Propozycja zbudowania komputera o specjalnej architekturze, 1993
- Propozycja wykorzystania obliczeń rozproszonych (łatwa dostępność sieci tysięcy komputerów), 1996
- Złamanie klucza, 1997 – kilka miesięcy obliczeń
  – 1998, wystarczyło 39 dni
  – 1999, czas liczony w godzinach
- DES Cracker – zakłada, że tekst jawny jest literą ascii 7-bit
  – szansa, że losowy klucz wyprodukuje 8 liter jest 1/60tys większość kluczy jest szybko odrzucana
  – maszyna ma 1500 procesorów, łamie każdy klucz w 4 dni
- Cost-Optimized PArallel COde Breaker (2006/2008): 1 dzień

Ataki na DES – inne

- Analiza różnicowa
  – odkryta w 1980
  – wymaga 2^{49} wybranych tekstów jawnych – za dużo
  – była znana i tajna w IBM
  – DES był zaprojektowany z myślą o odporności na ten atak
- Analiza liniowa
  – odkryta w 1993
  – wymaga 2^{43} wybranych tekstów jawnych, też dużo
  – nie była znana projektantom DES'a
- Połączenie ataków i usprawnienia
  – wymaga 2^{16} wybranych tekstów jawnych i 2^{29} obliczeń

Dane historyczne

- Pierwszy IBM PC: 4.7 MHz, 8 bitowy procesor
  – szyfrował w tempie 370 bloków (3 kB) na sekundę
  – 66 MHz 486, 16 bitowy procesor: 100 razy szybciej
  – 2GHz Pentium4, 32 bitowy procesor: 20 razy szybciej
- Hasła w systemie UNIX (historia)
  – 8 bajtów hasła tworzy klucz (56 bitów)
  – przechowuje się wynik szyfrowania kluczem ciągu zer
  – można dodać 12 bitów ziarna, zmieniają one nieco przebieg algorytmu DES
  – dłuższe hasła są niewykorzystane, krótsze uzupełniane
  – dziś stosuje się inne funkcje skrótu

Ratowanie DES–a

- Szyfrowanie dwukrotne: $E(k_1, E(k_2, m))$, przestrzeń kluczy jest iloczynem kartezjańskim, tzn. jest ich 2^{112}
- dany jest tekst jawny m i zaszyfrowany j.w.
  – $m = D(k_2, D(k_1, c))$ gdzie $c = E(k_1, E(k_2, m))$ czyli $D(k_1, c) = E(k_2, m)$
  – atak urodzinowy: można przygotować listę 2^{56} szyfrogramów $E(k, m)$ oraz 2^{56} tekstów odszyfrowanych $D(k, c)$ i sprawdzać, czy jest para identycznych
  – a więc dwukrotne szyfrowanie daje lepszą ochronę tylko przy założeniu, że barierą jest złożoność pamięciowa
  – trzykrotne szyfrowanie ma w tym sensie moc 2^{112}

Wersje DES–a

- 3DES – trzykrotne szyfrowanie
  – moc co najmniej taka jak szyfru 112 bitowego
  – zdefiniowano wersję $E(k_1, k_2, m) = E(k_1, D(k_2, E(k_1, m)))$
  – użycie D zamiast E nie zmienia siły, a ułatwia kompatybilność, $k_1 = k_2$ oznacza zwykłe szyfrowanie DES
  – uwaga: trzy różne klucze nie zwiększają mocy, klucze w innej kolejności zabijają ideę
- DESX – $E(k_1, k_2, k_3, m) = k_3 \oplus E(k_2, k_1 \oplus m)$
  – moc jest taka jak przestrzeń trzech kluczy
  – nie widać ataku podobnego do poprzedniego

AES (advanced encryption standard)

- 1997 – wezwanie NIST do zmiany szyfru
- założenia: klucze długości 128, 192 i 256 bitów
  – praca na procesorach 8–bitowych (karty inteligentne)
  – 15 kandydatur rozpatrywanych
- 5 finalistów:
  – MARS (IBM)
  – RC6 (RSA)
  – Rijndael (2 naukowców z Belgii)
  – Serpent (3 naukowców z USA)
  – Twofish (m.in. Schneier)
- obecny standard: AES=Rijndael

Rijndael

- Sieć podstawień i permutacji
  – blok 128 bitów (macierz 4×4 bajtów)
  – każdy bajt jest podstawiany za pomocą tego samego S-boksu
  – permutacją jest przesunięcie bajtów w wierszach macierzy
  – dodatkowo operacja algebraiczna na całej macierzy
- Oparty o teorię ciał skończonych (256 elementowych)
  – elementy przedstawiane są jako formalne wielomiany 8 stopnia, mnożenie wykonywane jest modulo pewien ustalony wielomian
  – pozwala to traktować bajty jak liczby, definiować operacje na wektorach i macierzach, są one odwracalne