

Teoretyczne podstawy informatyki

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

sem. letni 2025/26

inf.ug.edu.pl/~amb/TPI

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Teoretyczne podstawy informatyki sem. letni 2025/26 1 / 9

Wykład 06 Deterministyczne automaty ze stosem

Deterministyczne automaty ze stosem

- automaty zbudowane z gramatyk są niedeterministyczne
- gramatyki są immanentnie niedeterministyczne, zawierają w sobie możliwość wyboru albo dalszego rozwijania symbolu nieterminalnego, albo zakończenia rozwijania
- automat zbudowany dla języka $\{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ był deterministyczny
- def.: automat deterministyczny (DPDA) $\mathcal{A} = \langle Q, A, \Gamma, \delta, q_0, F, Z \rangle$ to automat, który ma funkcję przejścia taką, że $|\delta(q, a, X)| + |\delta(q, \varepsilon, X)| \leq 1$ dla wszystkich $a \in A, X \in \Gamma$
- tw. (oczywiste): języki regularne są akceptowane przez deterministyczny automat ze stosem, języki akceptowane przez deterministyczny automat ze stosem są bezkontekstowe
- okaże się, że język $\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ nie jest akceptowany przez deterministyczny automat ze stosem

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Teoretyczne podstawy informatyki sem. letni 2025/26 3 / 9

Języki bezkontekstowe c.d.

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Teoretyczne podstawy informatyki sem. letni 2025/26 2 / 9

Wykład 06 Deterministyczne automaty ze stosem

Własność przedrostka

- def.: język L ma własność przedrostka (*prefix free*), jeśli $w \in L, u \sqsubset w$ (u jest przedrostkiem właściwym w , tj. $uv = w, v \neq \varepsilon$) implikuje $u \notin L$
 - w szczególności, jeśli $\varepsilon \in L$, to $L = \{\varepsilon\}$
- własności przedrostka nie mają wyrażenia arytmetyczne, $2 + 3$ jest wyrażeniem ale $2 + 3 * 5$ też jest
 - standard SQL akceptuje zarówno `SELECT * FROM klient` jak i `SELECT * FROM klient WHERE ...`
- języki programowania zazwyczaj mają własność przedrostka
 - np. pascal kończy instrukcje średnikiem a cały program kropką
 - plik html musi kończyć się znacznikiem `</HTML>`
 - implementacje SQL żądają zakończenia pytania średnikiem
- język $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nie ma własności przedrostka podczas gdy $\{a^n b^n \mid n > 0\}$ ma tę własność

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Teoretyczne podstawy informatyki sem. letni 2025/26 4 / 9

Deterministyczne automaty ze stosem, własności

- tw.: język rozpoznawany przez deterministyczny automat ze stosem za pomocą pustego stosu ma własność przedrostka
- dw.: założmy, że $w \in L$, $w = uv$; jest tylko jedno obliczenie zaczynające się od konfiguracji $\langle q_0, w, Z \rangle$ i kończące $\langle q, \varepsilon, \varepsilon \rangle$ w międzyczasie musiała być konfiguracja $\langle q', v, \alpha \rangle$ gdyby $\alpha = \varepsilon$, oznaczałoby to zaakceptowanie u ale automat nie może wykonać żadnego ruchu, gdy stos jest już opróżniony, a nie ma innej ścieżki akceptującej w
- język palindromów nie jest rozpoznawany przez deterministyczny automat ze stosem: $abbaabba$ jest palindromem ale $abba$ też
 - podobnie język $\{a^n b^k \mid n > 0, k = n \text{ lub } k = 2 \cdot n\}$: słowo $a^n b^n$ jest właściwym przedrostkiem $a^n b^{2 \cdot n}$

Operacje na językach DPDA

- tw.: klasa języków rozpoznawanych przez deterministyczne automaty ze stosem poprzez stan akceptujący jest zamknięta na dopełnienie
- dw.: automat akceptujący jest deterministyczny, wobec czego wiemy jednoznacznie, czy słowo zostało zaakceptowane czy nie dowód wymaga jeszcze rozważenia możliwych ε -przejść, szczegóły omijamy
- nie jest domknięta na przekrój, sumę, konkatenację i iterację
 - przykład przekroju języków bezkontekstowych działa i tutaj
 - przykład dla sumy $\{a^n b^k \mid n > 0, k = n \text{ lub } k = 2 \cdot n\} = \{a^n b^n \mid n > 0\} \cup \{a^n b^{2 \cdot n} \mid n > 0\}$
 - iteracja języków nie ma własności przedrostka
 - dla konkatenacji automat nie potrafi zdecydować, w którym momencie zaakceptować część słowa jako należącą do jednego języka i zająć się dalszą częścią, szczegóły omijamy

Deterministyczne automaty ze stosem, własności, c.d.

- tw.: język jest rozpoznawany przez deterministyczny automat ze stosem za pomocą pustego stosu w.t.w. gdy ma własność przedrostka i jest rozpoznawany przez deterministyczny automat ze stosem za pomocą stanu akceptującego
- dw.: jeśli jest rozpoznawany przez pusty stos, to ma własność przedrostka, podobnie jak dla automatów niedeterministycznych dodajemy nowy symbol dna stosu, odczytanie tego symbolu powoduje przejście do nowego jedynego stanu akceptującego i na odwrót, w stanie akceptującym *jedynym* ruchem jest opróżnianie stosu do zera, nie ma obawy, że nie rozpoznamy dłuższego słowa, bo z założenia takich nie ma
- język $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ jest rozpoznawany przez DPDA–stan akceptujący ale nie przez DPDA–pusty stos

Operacje na językach DPDA c.d.

- tw.: przekrój języka DCFL i języka regularnego jest klasy DCFL
 - działa ten sam dowód, iloczyn kartezjański automatów deterministycznych jest deterministyczny, jeden z nich posługuje się dodatkowo stosem

Inne języki spoza klasy DPDA

- argument, że język nie ma własności przedrostka wystarcza, że nie jest rozpoznawany za pomocą stosu, ale nie dowodzi jeszcze, że nie jest rozpoznawany w ogóle przez DPDA
- języki bezkontekstowe, bez własności przedrostka, nierozpoznawalne przez DPDA
 - język palindromów, również parzystej długości
 - język $\{ucvcw \mid u, v, w \in \{a, b\}^*, u = v^R \text{ lub } v = w^R\}$
 - język $\{a^n b^k c^\ell \mid n = k \text{ lub } k = \ell\}$
 - w przykładzie z przekrojem języków bezkontekstowych, poniższa suma jest bezkontekstowa ale nie jest klasy DPDA

$$\overline{\{a^n b^n c^\ell \mid n, \ell \geq 1\}} \cup \overline{\{a^n b^\ell c^\ell \mid n, \ell \geq 1\}} = \overline{\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}}$$