

# Sieci Petriego

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki  
Uniwersytet Gdański

sem. letni 2025/2026

[inf.ug.edu.pl/~amb/](http://inf.ug.edu.pl/~amb/)

## Dlaczego sieci Petriego?

- Systemy sekwencyjne
  - kolejność wykonywania operacji jest dobrze określona
  - funkcja przejścia nie opisuje „przyczyny” zmiany
- Współbieżność
  - chcemy opisywać niezależne systemy współdziałające ze sobą
  - sama współbieżność jest źródłem problemów: niespójna analiza danych, utracona modyfikacja
  - blokowanie zasobów rozwiązuje pewne problemy współbieżności ale generuje nowe – zakleszczenie
- Przykład z filozofami
  - można zaprojektować pojedynczego filozofa jako proces deterministyczny: lewy widelec, prawy widelec, posiłek i zwolnienie zasobów
  - ale można wprowadzić niedeterminizm, widelce są brane w dowolnej kolejności, dalszy ciąg bez zmian

# Podsumowanie

## Definicje i przedstawienie graficzne sieci Petriego

- Sieci elementarne:
  - warunki: wartości binarne
  - zdarzenia: mają pre- i post-warunki
- Reprezentacja graficzna:
  - warunki: okręgi, jeśli są spełnione, to zaznaczenie w środku
  - zdarzenia: kwadraty lub b. grube kreski (pełne prostokąty)
  - strzałki wyjaśniające, które warunki przestają zachodzić, a które zaczynają po zajściu zdarzenia
  - zdarzenie może zajść tylko jeśli spełnione są warunki początkowe, ale *nie* są spełnione warunki końcowe
- sieć jest *czysta* jeśli zawsze  $\bullet x \cap x^\bullet = \emptyset$ 
  - czyli nie ma krótkich pętli
  - taka pętla jest bez sensu, zdarzenie nie ma szansy zajść bo albo prewarunek nie jest spełniony albo postwarunek jest spełniony
- sieć jest *prosta* jeśli  $(\bullet x, x^\bullet) = (\bullet y, y^\bullet)$  implikuje, że  $x = y$

## Definicje c.d.

- Sieci miejsc i tranzycji (P/T sieć)
  - trochę inna filozofia, inna terminologia
  - nie ma warunków binarnych, są miejsca gdzie przechowywane są zasoby
  - nie ma ograniczenia, że zajście tranzycji wymaga przedtem przedtem pustego miejsca
  - to samo miejsce  $p$  może mieć niezerowe wartości  $F(p, t)$  i  $F(t, p)$ ,  $p \in \bullet t \cap t \bullet$  (krótkie pętle)

| sieć elementarna       | sieć miejsc i tranzycji        |
|------------------------|--------------------------------|
| warunek                | miejsce                        |
| zdarzenie              | tranzycja (przejście)          |
| zachodzi pod warunkiem | zużywa zasoby                  |
| konfiguracja           | zaznaczenie ( <i>marking</i> ) |
| $C \subseteq B$        | $m : P \rightarrow \mathbb{N}$ |
| graf sekwencyjny       | graf zaznaczeń, graf stanów    |

## Współbieżność

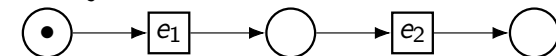
- $N = (B, E, F)$ ,  $\mathcal{U} \subseteq E$  jest *niezależny* jeśli  $\forall e, e' \in \mathcal{U}. (\bullet e \cup e \bullet) \cap (\bullet e' \cup e' \bullet) = \emptyset$
- $C \subseteq B$  – konfiguracja,  $\mathcal{U}$  jest umożliwiony,  $C[\mathcal{U}]$ , jeśli każde zdarzenie z  $\mathcal{U}$  jest umożliwione i są one niezależne
- $C[\mathcal{U}]C'$ , gdzie  $C' = (C \setminus \bullet \mathcal{U}) \cup \mathcal{U} \bullet$
- będziemy uważać, że zdarzenia z  $\mathcal{U}$  zachodzą współbieżnie
  - w szczególności ew. kolejność jest przypadkowa

## Zdarzenia i tranzycje

- $N = (B, E, F)$ ,  $C \subseteq B$  – konfiguracja,  $e \in E$ 
  - $e$  jest umożliwione w  $C$ ,  $C[e]$ , jeśli  $\bullet e \subseteq C$  oraz  $e \bullet \cap C = \emptyset$
- $C[e]C'$  gdzie  $C' = (C \setminus \bullet e) \cup e \bullet$ 
  - $C'$  jest wyznaczone jednoznacznie
  - zmiana wywołana zdarzeniem  $e$  nie zależy od całej konfiguracji  $C$
- $N = (P, T, F)$ ,  $m : P \rightarrow \mathbb{N}$  – zaznaczenie,  $t \in T$ 
  - $t$  jest umożliwiona w  $m$ ,  $m[t]$ , jeśli  $\forall p \in \bullet t. m(p) \geq F(p, t)$
- $m[t]m'$  gdzie  $\forall p \in P. m'(p) = m(p) - F(p, t) + F(t, p)$
- liczba wszystkich tokenów obecnych w sieci nie musi być stała
  - dla sieci elementarnej nie żądamy by  $|\bullet e| = |e \bullet|$ ,  $e \in E$
  - dla sieci miejsc i tranzycji nie żądamy, by  $\sum_{p \in P} F(t, p) - F(p, t) = 0$ ,  $t \in T$
- liczba tokenów w P/T-sieci może rosnąć nieograniczenie
  - w sieci elementarnej nie może być więcej niż jeden token w warunku, czyli suma jest ograniczona

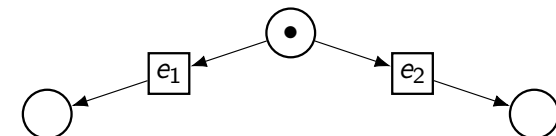
## Współbieżność – a raczej jej brak

- Przykład – sekwencja



- ciąg zdarzeń  $e_1 e_2$  jest w zaznaczonej konfiguracji możliwy
- ale zdarzenia  $e_1$  i  $e_2$  nie tworzą zbioru niezależnego
- zdarzenie  $e_2$  nie może być wykonane
- zbiór  $\{e_1, e_2\}$  nie może być jednocześnie wykonany

- Przykład – konflikt



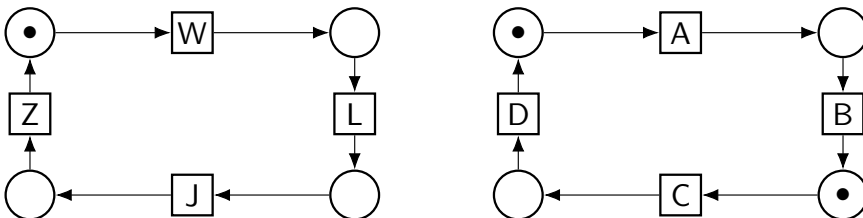
- każde ze zdarzeń może być wykonane
- ale tylko jedno z nich naraz
- zdarzenia  $e_1$  i  $e_2$  nie tworzą zbioru niezależnego
- zbiór  $\{e_1, e_2\}$  nie może być jednocześnie wykonany

## System elementarny

- $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ , gdzie  $N = (B, E, F)$  jest siecią elementarną a  $C_0 \subseteq B$  jest ustaloną konfiguracją początkową
- $N$  opisuje strukturę, zawsze taką samą
- $C_0$  wyznacza zachowanie, konfiguracja początkowa i późniejsze konfiguracje z niej powstałe
- $\mathcal{C} = [C_0]$  – zbiór konfiguracji osiągalnych  
 $\{U \subseteq E \mid \exists C \in [C_0]. C[U]\}$  – zbiór kroków, które mogą być kiedykolwiek wykonane
  - przez kroki rozumiemy również zbiory zdarzeń wykonywane wspólnie
  - graf sekwencyjny: wyłącznie kroki pojedyncze

## Sieci bezkontaktowe

- sieć  $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ , konfiguracja  $C \subseteq B$ , warunek zajęcia zdarzenia  $e \in E$  wymaga  $\bullet e \subseteq C$  oraz  $e^\bullet \cap C = \emptyset$
- def. sieć jest *bezkontaktowa* jeśli drugi warunek jest automatycznie spełniony:  $\forall C \in \mathcal{C}. \forall e \in E. \bullet e \subseteq C$  implikuje  $e^\bullet \cap C = \emptyset$
- definicja odnosi się do konfiguracji osiągalnych  $\mathcal{C}$  czyli tych, które naprawdę występują w konkretnej sieci  
 np.  $C = \bullet e \cup e^\bullet$  spełnia pierwszy warunek ale nie drugi  
 takie konfiguracje jednak wcale nie muszą występować w sieci elementarnej

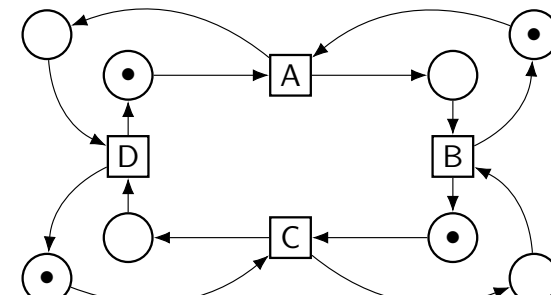


## Sieć miejsc i tranzycji, graf zaznaczeń (sekwencyjny)

- $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$ ,  $m_0 : P \rightarrow \mathbb{N}$  – zaznaczenie początkowe
- zaznaczenie  $m_0$  jest osiągalne,  $m$  jest osiągalne z  $m_0$ ,  $m \in [m_0]$ , jeśli istnieje ciąg tranzycji  $\tau = t_1 \dots t_n$  taki, że  $m_0[t_1]m_1[t_2] \dots [t_n]m$
- graf zaznaczeń:
  - zbiór wierzchołków  $[m_0]$ ,
  - wierzchołek wyróżniony  $m_0$
  - zbiór (etykietowanych) krawędzi  $\{m[t]m' \mid m, m' \in [m_0], t \in T\}$

## Sieci bezkontaktowe – konstrukcja

- Tw.: Dla każdej sieci  $\mathcal{N}$  istnieje podobna bezkontaktowa  
 dw: konstruujemy warunki dualne do istniejących, jeśli nie ma ich w sieci oryginalnej  
 dla wszystkich konfiguracji osiągalnych będzie zachodzić własność  $b \in C$  wtedy i tylko wtedy gdy  $b' \notin C$   
 w szczególności, jeśli  $\bullet e \subseteq C$  to  $e^\bullet \cap C = \emptyset$  – gdyby jakiś post-warunek nie był pusty, to pusty byłby dualny pre-warunek



## Sieć miejsc i tranzycji (P/T sieć), tranzycje, c.d.

- $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$ ,  $t \in T$ ,  $m : P \rightarrow \mathbb{N}$
- czasem rozważa się ograniczenie maksymalnej pojemności każdego z miejsc,  $k : P \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , wówczas  $m[t]$  o ile  $\forall p \in t^\bullet. m(p) + F(t, p) \leq k(p)$
- dla sieci elementarnych odpowiada to funkcji  $\forall p \in P. k(p) = 1$
- podobnie jak dla sieci elementarnych można dodać nowe miejsca dualne, zdefiniować  $F(p', t) = F(t, p)$  oraz  $F(t, p') = F(p, t)$  i  $m_0(p') = k(p) - m_0(p)$ , gdzie  $p'$  jest nowym miejscem dualnym do  $p$  – ale tylko dla miejsc o ograniczonej pojemności
- Tw.:  $\forall m \in [m_0], p \in P. k(p) < \infty \implies m(p) + m(p') = k(p)$   
 $m(p) + F(t, p) \leq k(p)$  jest więc równoważny  $F(p', t) \leq m(p')$

## Różne zależności pomiędzy własnościami behawioralnymi

- Sieć odwracalna jest żywa (jeśli  $\text{use}(E) = E$ )
- Sieć żywa nie ma zakleszczeń
- Sieć bez zakleszczeń dopuszcza nieskończone ciągi tranzycji
- Żadna z powyższych implikacji nie zachodzi w drugą stronę
- Sieć jest ograniczona wtedy i tylko wtedy gdy graf zaznaczeń jest skończony

## Możliwe własności behawioralne P/T sieci (i sieci elementarnych)

- $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$
- skończoność – nie jest umożliwiony żaden ciąg nieskończony tranzycji
- brak zakleszczeń – każde osiągalne z  $m_0$  zaznaczenie umożliwia jakąś tranzycję
- żywość – każde osiągalne zaznaczenie umożliwia ciąg tranzycji zawierający dowolnie wybraną tranzycję
- ograniczoność – istnieje funkcja  $b : P \rightarrow \mathbb{N}$  taka, że wszystkie zaznaczenia osiągalne spełniają  $m(p) \leq b(p)$ ,  $p \in P$
- 1-bezpieczeństwo – wszystkie zaznaczenia osiągalne spełniają  $m(p) \leq 1$ ,  $p \in P$
- odwracalność –  $m_0$  jest osiągalne z dowolnego zaznaczenia w  $[m_0]$

## Równoważności sieci elementarnych

- dane sieci  $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$  oraz  $\mathcal{N}' = (B', E', F', C'_0)$
- są *strukturalnie równoważne*,  $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}'$  w.t.w. istnieją bijekcje  $\beta : B \rightarrow B'$ ,  $\eta : E \rightarrow E'$  zachowujące relację przepływu i konfigurację początkową
- są *behawioralnie równoważne*,  $\mathcal{N} \approx \mathcal{N}'$  w.t.w. istnieją bijekcje  $\beta : [C_0] \rightarrow [C'_0]$ ,  $\eta : \text{use}(E) \rightarrow \text{use}(E')$  zachowujące konfigurację początkową i przejścia w grafie konfiguracji
- są *obserwacyjnie równoważne*,  $\mathcal{N} \sim \mathcal{N}'$  w.t.w. istnieje relacja (bisymulacji)  $\beta \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$  oraz bijekcja  $\eta : \text{use}(E) \rightarrow \text{use}(E')$  takie, że można symulować przejścia w jednej sieci za pomocą przejść drugiej sieci i na odwrót  
–  $\forall C, D \in [C_0], C' \in [C'_0], e \in \text{use}(E). C[e]D, (C, C') \in \beta \implies C'[\eta(e)]D'$  dla pewnego  $D' \in \mathcal{C}'$  takiego, że  $(D, D') \in \beta$

- Tw.: jeśli  $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}'$ , to  $\mathcal{N} \approx \mathcal{N}'$
- Tw.: jeśli  $\mathcal{N} \approx \mathcal{N}'$ , to  $\mathcal{N} \sim \mathcal{N}'$
- def.:  $FS(\mathcal{N}) = \{\omega \in E^* \mid C_0[\omega]\}$ , oczywiście  $FS(\mathcal{N}) \subseteq (\text{use}(E))^*$
- def.:  $\mathcal{N} \sim_{fs} \mathcal{N}'$  w.t.w. istnieje bijekcja  $\eta : \text{use}(E) \rightarrow \text{use}(E')$  taka, że  $\eta(FS(\mathcal{N})) = FS(\mathcal{N}')$
- Tw.:  $\mathcal{N} \sim \mathcal{N}'$  w.t.w.  $\mathcal{N} \sim_{fs} \mathcal{N}'$

# Techniki analizy sieci miejsc i tranzycji

- $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$
- def.: sieć  $\mathcal{N}$  jest zredukowana jeśli  $\text{use}(E) = E$ 
  - nie ma niepotrzebnych zdarzeń/tranzycji
- def.: sieć  $\mathcal{N}$  jest silnie zredukowana jeśli  $\forall b \in B. \text{nbh}(b) \neq \emptyset$ 
  - nie ma izolowanych warunków/miejsc
- sieć jest *B-prosta* jeśli  $(\bullet x, x \bullet) = (\bullet y, y \bullet)$  implikuje  $x = y$  dla  $x, y \in B$
- Tw.: dla każdej sieci  $\mathcal{N}$  istnieje silnie zredukowana *B-prosta* sieć  $\mathcal{N}'$  obserwacyjnie równoważna  $\mathcal{N}'$
- dw.: usuwamy niepotrzebne zdarzenia
  - usuwamy izolowane miejsca
  - jeśli  $(\bullet b, b \bullet) = (\bullet b', b' \bullet)$ , to usuwamy dowolne z tych miejsc

- $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$ ,  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$
- zaznaczenia  $m : P \rightarrow \mathbb{N}$  są wektorami  $m = \langle m(p_1), m(p_2), \dots, m(p_n) \rangle$
- tranzycje prowadzą do wektorów  $t : P \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $t(p) = F(t, p) - F(p, t)$
- wykonanie tranzycji to dodawanie wektorów:  $m[t]m'$  oznacza, że  $m' = m + t$
- def.: niezmiennik miejsc – wektor  $inv : P \rightarrow \mathbb{Z}$  taki, że  $\forall t \in T. \sum_{p \in P} F(p, t) \bullet inv(p) = \sum_{p \in P} F(t, p) \bullet inv(p)$ ,
- Tw.: dla każdego osiągalnego zaznaczenia  $m$ ,  $m \bullet inv = m_0 \bullet inv$
- przykład “wzajemne wykluczanie” zawsze  $m(akcja_1) + m(akcja_2) + m(zasób) = 1$
- Tw.: jeśli niezmiennik miejsc  $inv$  spełnia warunek  $\forall p \in P. inv(p) > 0$ , to każde z miejsc ma skończoną pojemność

## Techniki strukturalne

- def: *odpływ* – maksymalny zbiór miejsc  $A \subseteq P$  taki, że jeśli nie będzie w nim tokenów, to już na zawsze:  $t^\bullet \cap A \neq \emptyset$  implikuje  ${}^\bullet t \cap A \neq \emptyset$  równoważnie  ${}^\bullet A \subseteq A^\bullet$
- def: *pułapka* – minimalny zbiór miejsc taki, że jeśli znajdzie się w nim token, to nigdy już nie będzie pusty:  ${}^\bullet t \cap A \neq \emptyset$  implikuje  $t^\bullet \cap A \neq \emptyset$  równoważnie  $A^\bullet \subseteq {}^\bullet A$
- Tw.: jeśli sieć  $\mathcal{N}$  jest żywa, to każdy odpływ  $A \subseteq P$  ma jakiś token w zaznaczeniu  $m_0$ .
- Tw.: jeśli sieć jest odwracalna, silnie zredukowana, to każda pułapka zawiera token w  $m_0$ .
- Tw.: jeśli każdy  $A$  odpływ zawiera w sobie pułapkę z tokenem w zaznaczeniu  $m_0$ , to sieć  $\mathcal{N}$  nie ma zakleszczeń.

## Grafy znakowane

- def.: graf znakowany, *marked graph*, to sieć  $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$  bez założeń o wagach i pojemnościach taka, że  $\forall p \in P. |\bullet p| = |p^\bullet| = 1$
- w grafie znakowanym nie ma konfliktów, mogą być współbieżności
- Tw.: liczba tokenów na każdym cyklu grafu znakowanego  $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$  jest stała
- wniosek: graf znakowany jest żywy w.t.w. na każdym cyklu początkowe znakowanie  $m_0$  ma co najmniej jeden token
- jest 1-bezpieczny w.t.w. na każdym cyklu jest dokładnie 1 token

## Maszyny stanowe i systemy sekwencyjne

- def.: maszyna stanowa, *state machine*, to sieć  $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$  bez założeń o wagach i pojemnościach taka, że  $\forall t \in T. |\bullet t| = |t^\bullet| = 1$
- Tw.: liczba tokenów w maszynie stanowej jest stała
- wniosek: każde miejsce w maszynie stanowej ma ograniczoną pojemność
- Tw.: maszyna stanowa  $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$  jest żywa w.t.w. każda składowa spójności jest silnie spójna i ma token w  $m_0$
- system sekwencyjny*:  $\forall C \in \mathcal{C}. |C| = 1$
- w systemie sekwencyjnym nie ma w ogóle współbieżności – ale odwrotna zależność nie zachodzi

## Podsieci sieci elementarnych

- def.: sieć (elementarną)  $\mathcal{N}' = (B', E', F', C'_0)$  nazywamy *podsiecią*  $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$  jeśli
  - $B' \subseteq B, E' \subseteq E, F' \subseteq F, C'_0 \subseteq C_0$
  - $\forall b \in B'. \forall e \in E. (b, e) \in F \Rightarrow e \in E', (b, e) \in F' \Rightarrow (e, b) \in F \Rightarrow e \in E', (e, b) \in F' \Rightarrow (e, b) \in F$
  - $\forall b \in B'. b \in C_0 \Rightarrow b \in C'_0$
- podsieć  $\mathcal{N}'$  nazywamy *składową sekwencyjną* sieci  $\mathcal{N}$  jeśli  $\mathcal{N}'$  jest siecią sekwencyjną
- Tw.: podsieć  $\mathcal{N}'$  jest zawsze wyznaczona przez zbiór swoich warunków
- Tw.: podzbiór  $B' \subseteq B$  wyznacza podsieć w.t.w.  ${}^\bullet B' = B'^\bullet$

## Pokrycia

- $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$  sieć elementarna, *pokryciem* jest zbiór podsieci  $\{\mathcal{N}_i = (B_i, E_i, F_i, (C_0)_i) \mid i = 1, \dots, k\}$  taki, że  $B = \bigcup_{i=1}^k B_i$ ,  $E = \bigcup_{i=1}^k E_i$ ,  $F = \bigcup_{i=1}^k F_i$ ,  $C_0 = \bigcup_{i=1}^k (C_0)_i$
- jest to pokrycie składowymi sekwencyjnymi, jeśli wszystkie podsieci są sekwencyjne
- sieć nie musi mieć wcale pokrycia składowymi sekwencyjnymi
- Tw.: dla każdej sieci  $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$  istnieje sieć zredukowana  $\mathcal{N}'$  równoważna behawioralnie i mająca pokrycie składowymi sekwencyjnymi

## Procesy a grafy konfiguracji

- proces  $p : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}$  jest *elementarny* jeśli  ${}^\circ B' \cup B'^\circ = B'$
- proces elementarny  $p : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}$  odpowiada krokowi w grafie konfiguracji  $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$
- i na odwrót, krok  $C[A]D$  w  $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$  definiuje sieć wystąpień  $(C \cup D, A, F \cap (C \cup D \cup A)^2)$  i proces *id*
- ścieżka w  $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$  składa się z kroków, składając procesy otrzymujemy proces dla ścieżki
- ale wiele ścieżek może generować ten sam proces
- Tw.: ścieżki generują ten sam proces w.t.w. istnieje ciąg permutacji prowadzący od jednej ścieżki do drugiej

## Sieci wystąpień i procesy

- Sieć  $\mathcal{N} = (B, E, F)$  jest *siecią wystąpień* w.t.w.
  - sieć jest acykliczna tzn.  $\forall x \in B \cup E. \neg(x, x) \in F^+$
  - $\forall b \in B. |\bullet b|, |b \bullet| \leq 1$  – nie ma rozgałęzień na elementach  $B$
- $F^+$  jest relacją porządku na  $B \cup E$
- *płat* – cięcie zawarte w  $B$ , tylko warunki
- linia w sieci wystąpień to składnik sekwencyjny sieci  
płat w sieci wystąpień to „migawka”, konfiguracja warunków zachodzących w pewnym momencie
- *procesem* sieci (bezkontaktowej)  $\mathcal{N}$  jest odwzorowanie  $p : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}$  takie, że
  - $\mathcal{N}' = (B', E', F')$  jest siecią wystąpień
  - $\forall D \subseteq B'$ . jeśli  $D$  jest płatem, to  $p(D) \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}$  oraz  $p|D$  jest różnowartościowe
  - $\forall e' \in E'. p(\bullet e') = \bullet p(e'), p(e' \bullet) = p(e') \bullet$

## Sieć predykatów i zdarzeń

- $\mathcal{N} = (B, E, F, D, \lambda, C_0)$  jest siecią predykatów i zdarzeń jeśli
  - $(B, E, F)$  jest siecią warunków i zdarzeń bez miejsc izolowanych
  - $D$  jest algebrą
  - $C_0 : B \rightarrow \text{Pow}(D)$
  - $\lambda : F \rightarrow \text{Pow}(\text{Term}(D))$ , wykluczamy tu zbiór pusty
- konfiguracja  $C : B \rightarrow \text{Pow}(D)$
- filozofowie i widelce mają swoje nazwy, dla filozofa  $x$  wiadomo, który z widelców jest lewy,  $\ell(x)$ , a który prawy,  $r(x)$
- zdarzenie  $p$ 
  - konsumuje warunki: filozof  $x$  myśli a widelce  $\ell(x)$ ,  $r(x)$  są wolne
  - i produkuje warunki: filozof  $x$  je a widelce  $\ell(x)$ ,  $r(x)$  są zajęte
- zdarzenie  $k$ 
  - konsumuje warunki: filozof  $x$  je a widelce  $\ell(x)$ ,  $r(x)$  są zajęte
  - i produkuje warunki: filozof  $x$  myśli a widelce  $\ell(x)$ ,  $r(x)$  są wolne

## Występowanie zdarzeń w sieci predykatów i zdarzeń

- wartościowanie zmiennych to odwzorowanie  $\rho : Var \rightarrow D$ , w praktyce o skończonej dziedzinie
- wyznacza ono znaczenie termów, pod warunkiem, że jest określone dla zmiennych występujących w tych termach
- $C[e]$  w.t.w.
  - $\forall b \in \bullet e. \llbracket \eta(b, e) \rrbracket_\rho \subseteq C(b)$
  - $\forall b \in e^\bullet. \llbracket \eta(e, b) \rrbracket_\rho \cap C(b) = \emptyset$
- $C[e]C'$  w.t.w.  $C'(b) = C(b) \setminus \llbracket \overline{(b, e)} \rrbracket_\rho \cup \llbracket \overline{(e, b)} \rrbracket_\rho$  gdzie przyjmujemy, że zbiory są puste jeśli wyrażenia są nieokreślone
- uwaga: nie są to sieci elementarne, nie wykluczamy przypadku  $b \in \bullet e \cap e^\bullet$  czyli krótkiej pętli

## Drzewo i graf pokrycia sieci

- dana sieć  $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$ , być może nieograniczona
- drzewem pokrycia jest graf, którego wierzchołki to  $\omega$ -ciągi tranzycji a krawędzie to dołożenie nowej tranzycji
- drzewo pokrycia skończonej sieci jest skończone
  - w szczególności istnieje skończenie wiele  $\omega$ -zaznaczeń
- graf pokrycia ma jako wierzchołki  $\omega$ -zaznaczenia osiągalne i tranzycje, które można wykonać w tych zaznaczeniach
- graf pokrycia można otrzymać z drzewa pokrycia utożsamiając wierzchołki prowadzące do tego samego  $\omega$ -pokrycia

## „Nieskończone” zaznaczenia i ciągi tranzycji

- Tw.: jeśli graf zaznaczeń  $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$  jest skończony, to sieć jest ograniczona  
wniosek: dla sieci nieograniczonych potrzebne jest inne narzędzie
- $\omega$ -zaznaczenie to funkcja  $\bar{m} : P \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ , zwykłe zaznaczenie też jest  $\omega$ -zaznaczeniem
- założymy  $m[\sigma]m'$  dla pewnych zaznaczeń osiągalnych  $m, m' \in [m_0]$ ,  $\sigma \in T^*$  i  $\forall p \in P. m'(p) \geq m(p)$ , tzn. liczba tokenów nie zmniejsza się jeśli  $m'(p_0) > m(p_0)$  dla miejsca  $p_0$ , to liczba tokenów zwiększa się i nie ma żadnych ograniczeń dla tej liczby  
 $\omega$ -zaznaczenie będzie miało wartość  $\omega$  dla miejsca  $p_0$
- wartość  $\omega$  w pewnym miejscu pozwala wykonać każdą tranzycję, tranzycje w ciągu będą wykonywane tak długo aż stanie się jasne, że nie ma granicy dla liczby tokenów