

Sieci Petriego

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

sem. letni 2025/2026

inf.ug.edu.pl/~amb/

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Sieci Petriego sem. letni 2025/2026 1 / 18

Sieci miejsc i tranzycji

Sieć miejsc i tranzycji, przypomnienie

- $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$
- P – miejsca, T – tranzycje, $P \cap T = \emptyset$, $P \cup T \neq \emptyset$, skończone
 - $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ – relacja przepływu, $w : F \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$
 - $m_0 : P \rightarrow \mathbb{N}$ – zaznaczenie początkowe
- $\bullet x = \{y \mid F(y, x) > 0\}$, $x^\bullet = \{y \mid F(x, y) > 0\}$
- miejsca mają nieograniczone pojemności, stąd zaznaczenia $m : P \rightarrow \mathbb{N}$
- to samo miejsce p może mieć niezerowe wartości $F(p, t)$ i $F(t, p)$,
 $p \in \bullet t \cap t^\bullet$ (krótkie pętle)
- $t \in T$ jest umożliwiona w $m : P \rightarrow \mathbb{N}$, jeśli $\forall p \in \bullet t. m(p) \geq F(p, t)$
- wówczas $m[t]m'$ gdzie, $\forall p \in P. m'(p) = m(p) - F(p, t) + F(t, p)$
- m jest osiągalne z m_0 , $m \in [m_0]$, jeśli istnieje ciąg tranzycji
 $\tau = t_1 \dots t_n$ taki, że $m_0[t_1]m_1[t_2] \dots [t_n]m$
- krawędzie grafu zaznaczeń: $\{m[t]m' \mid m, m' \in [m_0], t \in T\}$
- liczba tokenów może rosnać nieograniczenie, graf zaznaczeń może być nieskończony, mimo, że P jest skończony

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Sieci Petriego sem. letni 2025/2026 3 / 18

Sieci miejsc i tranzycji c.d.

o oparciu o materiały: J. Desel, W. Reisig *Place/Transition Net Systems*

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Sieci Petriego sem. letni 2025/2026 2 / 18

Sieci miejsc i tranzycji

C.d.

- $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$
- tranzycja $t \in T$ jest żywa w zaznaczeniu osiągalnym $m \in [m_0]$ jeśli istnieje możliwość wykonania jej w przyszłości, $m[\sigma t]$, $\sigma \in T^*$
- sieć $\mathcal{N}$ jest żywa, jeśli każda tranzycja jest żywa w każdym osiągalnym zaznaczeniu
- jeśli sieć jest żywa i nietrywialna w sensie $T \neq \emptyset$, to nie ma zakleszczeń
 - i każde miejsce nieizolowane będzie zaznaczone w jakimś zaznaczeniu osiągalnym
- miejsce $p \in P$ jest ograniczone jeśli wszystkie osiągalne zaznaczenia spełniają $m(p) \leq b$ dla pewnej liczby $b \in \mathbb{N}$
- sieć jest ograniczona gdy istnieje wspólne ograniczenie dla wszystkich miejsc
- sieć jest odwracalna, jeśli z każdego zaznaczenia osiągalnego można wrócić do początkowego

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Sieci Petriego sem. letni 2025/2026 4 / 18

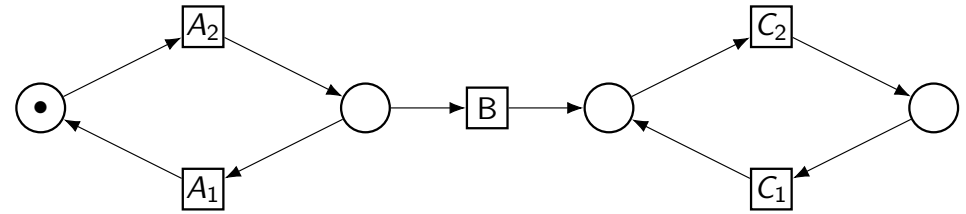
Proste własności

- $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$
- jeśli $m[t]$, $t \in T$, $m, m' : P \rightarrow \mathbb{N}$ oraz $\forall p \in P, m'(p) \geq m(p)$, to również $m'[t]$
- niech $m[ts]$ oraz $t^\bullet \cap s^\bullet = \emptyset$, wówczas $m[st]$, dokładniej $m[\{t, s\}]m'$ oraz $\forall p \in P. m'(p) = m(p) - F(p, t) - F(p, s) + F(t, p) + F(s, p)$

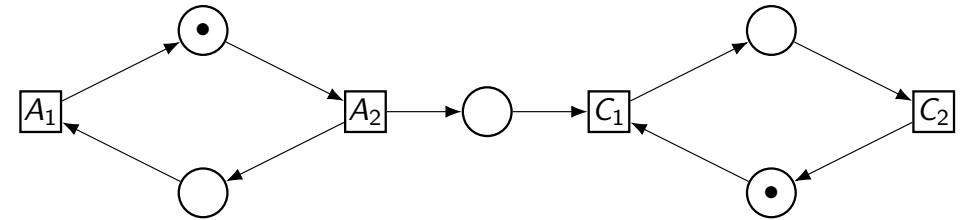
Silna spójność sieci c.d.

- Tw.: założmy, że sieć $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$ jest spójna, jeśli jest jednocześnie ograniczona i żywa, to jest silnie spójna
- dw.: przypadek 1: $p \in {}^\bullet t$. Definiujemy $V = \{v \in T \mid \exists \text{ ścieżka od } t \text{ do } v\}$, jeśli $u \notin V$, to $v^\bullet \cap {}^\bullet u = \emptyset$
Niech b jest ograniczeniem dla sieci (i miejsca p), sieć jest żywa, więc tranzycję t można wykonać $b + 1$ razy w jakimś ciągu tranzycji.
Tranzycje spoza V , jeśli w ogóle występują, można przenieść na początek i otrzymać $m[\sigma]$ gdzie $\sigma \in V^*$, t występuje $b + 1$ razy w σ .
Oznacza to, że miejsce p musiało być zasilone przez jakąś tranzycję $v \in V$, $p \in v^\bullet$, co daje ścieżkę od t poprzez v do p .
- przypadek 2: $t \in {}^\bullet p$. Można podobnie zdefiniować tranzycje z których jest ścieżka do t i uzasadniać że skoro można bez końca wykonywać t a miejsce p jest ograniczone, to któraś z tych tranzycji musi odbierać tokeny z p co daje ścieżkę od p do t .

Silna spójność sieci



- sieć jest ograniczona (zawsze jest jeden token w całej sieci), nie jest żywa (tranzycje A_1 i A_2 przestają być żywe)

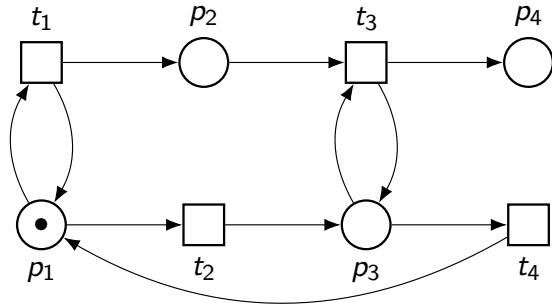


- sieć jest nieograniczona (tranzycja A_2 rozmnaża tokeny) i żywa

„Nieskończone” zaznaczenia i ciągi tranzycji

- $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$
- Tw.: jeśli graf zaznaczeń jest skończony, to sieć jest ograniczona
wniosek: dla sieci nieograniczonych potrzebne jest inne narzędzie
- ω -zaznaczenie to funkcja $\bar{m} : P \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\omega\}$, zwykłe zaznaczenie też jest ω -zaznaczeniem
- założmy $m[\sigma]m'$ dla pewnych zaznaczeń osiągalnych $m, m' \in [m_0]$, $\sigma \in T^*$ i $\forall p \in P. m'(p) \geq m(p)$, tzn. liczba tokenów nie zmniejsza się jeśli $m'(p_0) > m(p_0)$ dla miejsca p_0 , to liczba tokenów zwiększa się i nie ma żadnych ograniczeń dla tej liczby
 ω -zaznaczenie będzie miało wartość ω dla miejsca p_0
- wartość ω w pewnym miejscu pozwala wykonać każdą tranzycję, tranzycje w ciągu będą wykonywane tak długo aż stanie się jasne, że nie ma granicy dla liczby tokenów

Przykład



- tranzycja t_1 konsumuje jeden token a produkuje dwa, liczba tokenów w miejscu p_2 może być dowolnie duża
- pozostałe tranzycje produkują tyle samo tokenów co konsumują
- w dolnej linii można przenieść token do p_3 , wówczas tranzycja t_3 będzie przenosić tokeny z p_2 do p_4 , nie ma ograniczeń na ich liczbę

Przykład c.d.

- jedynymi ω -ciągami tranzycji są ciągi (plus ich przedrostki)
 - $t_1 t_1$ i okazało się, że w p_2 jest wartość ω
 - $t_1 t_2 t_3 t_3$ korzystamy z wartości ω w p_2 i ujawnia się wartość ω w p_4
 - $t_1 t_2 t_3 t_4 t_1$
 - $t_1 t_2 t_3 t_4 t_2$
 - $t_1 t_2 t_4$
 - $t_2 t_4$
- $t_1 t_2 t_3 t_3$ jest ω -ciągami ale nie jest ciągiem tranzycji, konieczne było wykorzystanie wartości ω
- $t_1 t_1 t_1$ nie jest ω -ciągami, bo już po dwóch wykonaniach wiadomo, że wartość zaznaczenia w p_2 jest ω i kolejne wykonanie jest niedozwolone

 ω -ciągi tranzycji

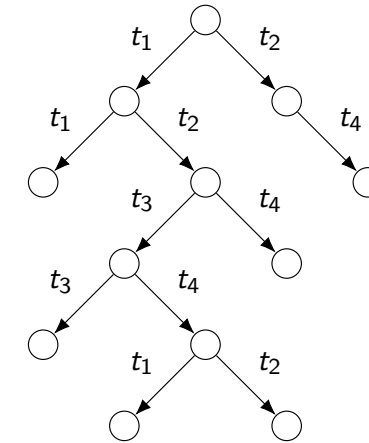
- dana sieć $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$, być może nieograniczona
- ciąg $t_1 t_2 \dots t_k \in T^*$ jest ω -ciągami tranzycji jeśli istnieje ciąg ω -zaznaczeń $\overline{m}_0, \overline{m}_1, \dots, \overline{m}_k$ taki że
 - $\overline{m}_0 = m_0$
 - $\forall i > 0. \forall p \in P. \overline{m}_{i-1}(p) \geq F(p, t_i)$, przyjmujemy, że wartość nieskończona jest wystarczająco duża dla każdej liczby
 - $\forall i > 0. \forall p \in P. \overline{m}_i(p) = \overline{m}_{i-1}(p) - F(p, t_i) + F(t_i, p)$ chyba, że okazało się, iż dla $j < i$, $\overline{m}_j(p) < \overline{m}_i(p)$ oraz $\overline{m}_j(p') \leq \overline{m}_i(p')$ dla $p' \neq p$ wówczas zmieniamy wyliczenie i przyjmujemy $\overline{m}_i(p) = \omega$
 - $\forall i \leq k. \overline{m}_{i-1} \notin \{\overline{m}_0, \overline{m}_1, \dots, \overline{m}_{i-2}\}$
- ciąg tranzycji zatrzymujemy dla $i = k$ gdy okaże się, że $\overline{m}_{k-1}[t_k] \overline{m}_k$ prowadzi do ω -zaznaczenia obecnego wcześniej

Skończoność ω -ciągów tranzycji

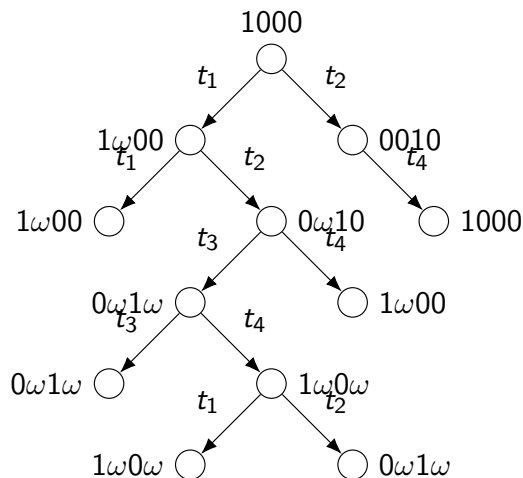
- Tw.: każdy ω -ciąg tranzycji skończonej sieci jest skończony
- dowód opiera się na lemacie kombinatorycznym (lemat Dicksona): jeśli P jest skończone i $\varphi_1, \varphi_2, \dots : P \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ jest dowolnym ciągiem funkcji, to istnieje podciąg $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots$ monotoniczny, tzn. $\forall \ell. \forall p \in P. \varphi_{i_\ell}(p) \leq \varphi_{i_{\ell+1}}(p)$
 - dw lematu: rozpatrujemy elementy P po kolei
 - dla kolejnego elementu p z dostępnego ciągu funkcji wybieramy funkcję o jak najmniejszej wartości $\varphi(p)$
 - i kolejną funkcję o większym numerze i jak najmniejszej wartości
 - otrzymany ciąg spełnia warunek dla p i przechodzimy do kolejnego elementu wybierając z niego podciąg
- ω -ciąg tranzycji wyznacza ciąg ω -zaznaczeń, gdyby był nieskończony można by wybrać podciąg monotoniczny a definicja ω -ciągu wymagała by
 - wstawić wartość ω , gdy jest udowodniono wzrost
 - zakończyć ciąg, gdy dojdzie do powtórzenia ω -zaznaczenia

Drzewo pokrycia sieci

- dana sieć $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$, być może nieograniczona
- drzewem pokrycia jest graf, którego wierzchołki to ω -ciągi tranzycji a krawędzie to dołożenie nowej tranzycji
- ω -ciągi odwołują się do ciągów ω -zaznaczeń, ostatnie z nich można przyjąć za etykiety wierzchołka, etykiety mogą się powtarzać
- drzewo pokrycia skończonej sieci jest skończone
dw: w przeciwnym przypadku istniałaby nieskończona gałąź, czyli jeden nieskończony ω -ciąg tranzycji – niemożliwe
- w szczególności istnieje skończenie wiele ω -zaznaczeń



Przykład c.d.



Przykład c.d.

Osiągalne ω -zaznaczenia i zaznaczenia

- Tw.: dla każdego osiągalnego ω -zaznaczenia $\bar{m}$, dla każdej liczby b istnieje osiągalne zaznaczenie m takie, że $\forall p \in P$
 - jeśli $\bar{m}(p) < \omega$, to $m(p) = \bar{m}(p)$
 - jeśli $\bar{m}(p) = \omega$, to $m(p) \geq b$
- Tw.: dla każdego osiągalnego zaznaczenia m istnieje osiągalne ω -zaznaczenie $\bar{m}$ takie, że $\forall p \in P$. $\bar{m}(p) = m(p)$ lub $\bar{m}(p) = \omega$
- Tw.: miejsce $p \in P$ jest
 - nieograniczone w.t.w. istnieje ω -zaznaczenie $\bar{m}$ takie, że $\bar{m}(p) = \omega$
 - ograniczone z ograniczeniem b w.t.w. każde ω -zaznaczenie ma wartość $\leq b$

Graf pokrycia sieci

- dana sieć $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$,
- graf pokrycia ma jako wierzchołki ω -zaznaczenia osiągalne i tranzycje, które można wykonać w tych zaznaczeniach
- graf pokrycia można otrzymać z drzewa pokrycia utożsamiając wierzchołki prowadzące do tego samego ω -pokrycia

Przykład c.d.

