Sieci Petriego

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

sem. letni 2023/2024

inf.ug.edu.pl/~amb/

Sieci miejsc i tranzycji

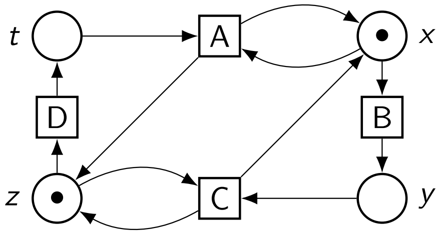
Osiągalność – graf zaznaczeń

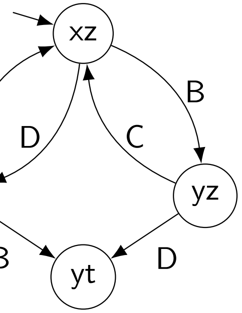
- $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$, zaznaczenie m_0 jest osiągalne
- m jest osiągalne z m_0, $m \in [m_0\rangle$, jeśli istnieje ciąg tranzycji $\tau = t_1 \dots t_n$ taki, że $m_0[t_1\rangle m_1[t_2\rangle \dots [t_n\rangle m$
- w m_0 może okazać się umożliwiony również nieskończony ciąg tranzycji $\tau = t_1 t_2 \dots$
- graf zaznaczeń:
  – zbiór wierzchołków $[m_0\rangle$,
  – wierzchołek wyróżniony m_0
  – zbiór (etykietowanych) krawędzi $\{m[t\rangle m' \mid m, m' \in [m_0\rangle, t \in T\}$

Możliwe własności behawioralne P/T sieci

- $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$
- skończoność – nie jest umożliwiony żaden ciąg nieskończony tranzycji
- brak zakleszczeń – każde osiągalne z m_0 zaznaczenie umożliwia jakąś tranzycję
- żywość – każde osiągalne zaznaczenie umożliwia ciąg tranzycji zawierający dowolnie wybraną tranzycję
- ograniczoność – istnieje funkcja $b : P \to \mathbb{N}$ taka, że wszystkie zaznaczenia osiągalne spełniają $m(p) \leqslant b(p), p \in P$
- 1-bezpieczeństwo – wszystkie zaznaczenia osiągalne spełniają $m(p) \leqslant 1, p \in P$
- odwracalność – m_0 jest osiągalne z dowolnego zaznaczenia w $[m_0\rangle$

Przykład zakleszczenia



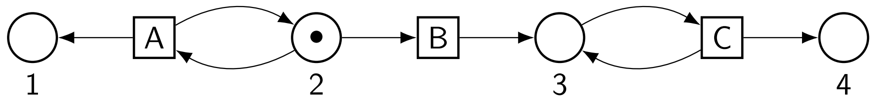


- zakleszczenie w sieci oznacza, że graf zaznaczeń ma „zlew" – wierzchołek bez następników
- w zaznaczeniu $\{y, t\}$ ani tranzycja A ani C nie są umożliwione – A wymaga obecności x, C wymaga z, mimo, że nie ulegają w sumie zmianie
- Tw.: sieć bez zakleszczeń dopuszcza nieskończone ciągi tranzycji
- powyższa sieć dopuszcza nieskończony ciąg tranzycji, $(DA|BC)^*$, i jednocześnie ma możliwość zakleszczenia

Zakleszczenia a żywość

- Tw.: jeśli sieć jest żywa, jest bez zakleszczeń

  – dw.: skoro w dowolnym zaznaczeniu m, dowolna tranzycja t ma możliwość wykonania w przyszłości, to m nie jest zakleszczeniem
- brak zakleszczeń nie wyklucza, że pewne tranzycje staną się martwe



po wykonaniu B już nigdy A nie będzie możliwe, samo B będzie wykonane najwyżej jeden raz

Skończoność grafu zaznaczeń a ograniczoność sieci

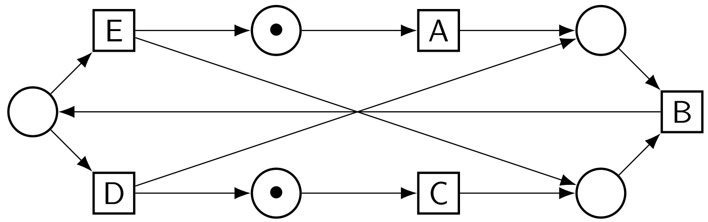
- $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$
- Tw.: sieć jest ograniczona wtedy i tylko wtedy gdy graf zaznaczeń jest skończony
- dw.: jeśli o osiągalnych zaznaczeniach m wiadomo, że $m(p) < max$, $p \in P$, dla pewnej liczby max, to liczba zaznaczeń nie może przekraczać max^n gdzie $n = |P|$

  jeśli liczba osiągalnych zaznaczeń jest skończona, to można je przejrzeć i znaleźć najwyższą osiągalną wartość dla każdego miejsca
- wniosek: sieć 1-bezpieczna ma najwyżej 2^n możliwych stanów (zaznaczeń)

Żywość a odwracalność

- Tw.: sieć odwracalna (która nie ma martwych tranzycji) jest żywa

  – dw.: z dowolnego zaznaczenia można wrócić do początkowego i wykonać poźniej dowolną tranzycję
- odwrotna implikacja nie jest prawdziwa



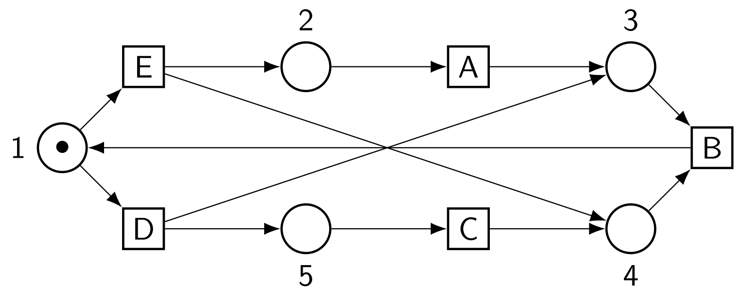
na początku muszą być wykonane tranzycje A i C, możliwe, że współbieżnie, później B.
W tym zaznaczeniu albo nastąpi ciąg DC albo EA i znowu B, język $(AC|CA)(B(DC|EA))^*$. Ale początkowe zaznaczenie będzie już nieosiągalne.

Techniki analizy sieci miejsc i tranzycji

Algebra liniowa

- $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$, $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$
- zaznaczenia $m : P \to \mathbb{N}$ są wektorami $m = \langle m(p_1), m(p_2), \ldots, m(p_n)\rangle$
- tranzycje prowadzą do wektorów $t : P \to \mathbb{Z}$, $t(p) = F(t, p) - F(p, t)$
- wykonanie tranzycji to dodawanie wektorów: $m[t\rangle m'$ oznacza, że $m' = m + t$
- $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$, $\tau \in T^+$ dowolny (niepusty) ciąg tranzycji
  wektor Parikha względem zbioru tranzycji
  $P(\tau)(t_i)$ jest liczbą wystąpień t_i w ciągu τ
  $m[\tau\rangle m'$ oznacza, że $m' = m + P(\tau) \cdot F$, tzn.
  $m'(p) = m(p) + \Sigma_{i=1}^{k} P(\tau)(t_i) \cdot t_i(p)$, $p \in P$
- wniosek: warunkiem koniecznym osiągalności zaznaczenia m jest istnienie rozwiązania $m - m_0 = x \cdot F$ dla pewnego wektora $x \in T \to \mathbb{N}$

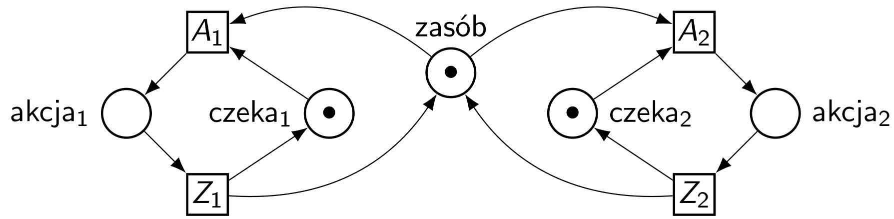
Przykład algebry



A: $(0, -1, 1, 0, 0)$	$(1, 0, 0, 0, 0)$	$m_0 = m_0 + D + C + B = \ldots$
B: $(1, 0, -1, -1, 0)$	$(0, 1, 0, 1, 0)$	$m_0 + E$
C: $(0, 0, 0, 1, -1)$	$(0, 0, 1, 0, 1)$	$m_0 + D$
D: $(-1, 0, 1, 0, 1)$	$(0, 0, 1, 1, 0)$	$m_0 + E + A = m_0 + D + C$
E: $(-1, 1, 0, 1, 0)$	$(0, 1, 0, 0, 1)$	$m_0 + B + D + E$

- ostatnie zaznaczenie nie jest osiągalne
- istnieje jednak wektor tranzycji (B, D, E), który rozwiązuje równanie
- struktura sieci dokładniej pokazuje ograniczenia

Niezmienniki miejsc – przykład „wzajemne wykluczanie”



- Przykład: wzajemne wykluczanie (*mutual exclusion*)
- każdy proces działa w cyklu akcja (i wykorzystanie wspólnego zasobu) - koniec akcji (zwolnienie zasobu i czekanie)
- chcemy, by każde osiągalne zaznaczenie m spełniało $m(akcja_1) + m(akcja_2) \leqslant 1$
- pokażemy, że zawsze $m(akcja_1) + m(akcja_2) + m(zasób) = 1$
- tak jest dla zaznaczenia początkowego i nie zmienia się w żadnej tranzycji

Niezmiennik miejsc – definicja

- $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$ – sieć miejsc i tranzycji
- def.: niezmiennik miejsc – wektor $inv : P \to \mathbb{Z}$ taki, że $\forall\, t \in T .\, t \cdot inv = 0$,
- t traktujemy jako wektor nad P, $t(p) = F(t,p) - F(p,t)$ czyli $\forall\, t \in T .\, \Sigma_{p \in P} F(p,t) \cdot inv(p) = \Sigma_{p \in P} F(t,p) \cdot inv(p)$,
- Tw.: dla każdego osiągalnego zaznaczenia m, $m \cdot inv = m_0 \cdot inv$
- dw: rozważmy dowolną tranzycję $m[t\rangle m'$. Wówczas $m' = m + t$ czyli $m' \cdot inv = m \cdot inv + t \cdot inv$, ostatni składnik jest równy 0.

- W przykładzie $P = \{akcja_1, czeka_1, zasób, czeka_2, akcja_2\}$
  $inv = (1,0,1,0,1)$ i np. $A_1 = (1,-1,-1,0,0)$, $A_1 \cdot inv = 0$
  $m_0 = (0,1,1,1,0)$, $m_0 \cdot inv = 1$
  czyli zawsze $m(akcja_1) + m(akcja_2) + m(zasób) = 1$

Niezmiennik miejsc a żywość

- $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$
- załóżmy, że inv jest niezmiennikiem, $\forall\, p \in P .\, inv(p) \geqslant 0$, $inv(p) > 0$ dla pewnego miejsca $p \in P$ oraz $inv \cdot m_0 = 0$
- wówczas tranzycja $t \in {}^\bullet p \cup p^\bullet$ nie może być wykonana ani w m_0 ani w żadnym innym zaznaczeniu m
- wniosek: jeśli wszystkie tranzycje są żywe i $inv \geqslant 0$, $inv \neq 0$, to $inv \cdot m_0 > 0$

Niezmiennik miejsc a ograniczoność

- Tw.: jeśl niezmiennik miejsc inv spełnia warunek $\forall\, p \in P .\, inv(p) > 0$, to każde z miejsc ma skończoną pojemność
- dw.: $inv \cdot m = inv \cdot m_0$ dla wszystkich zaznaczeń osiągalnych $m \in [m_0\rangle$, stąd dla dowolnego miejsca $p \in P$ zachodzi $m(p) \cdot inv(p) \leqslant m \cdot inv = m_0 \cdot inv$.
  Po podzieleniu przez $inv(p)$ mamy oszacowanie górne na $m(p)$.
- przykład dla wzajemnego wykluczania: niezmiennikami są $\{akcja_1, zasób, akcja_2\}$ oraz $\{akcja_1, czeka_1\}$ i $\{akcja_2, czeka_2\}$ a więc również ich suma $inv = (2,1,1,1,2)$, $inv \cdot m_0 = 3$

Niezmiennik miejsc a nieosiągalność zaznaczenia

- Tw.: istnieje niezmiennik inv taki, że $inv \cdot m_0 \neq inv \cdot m$ wtedy i tylko wtedy gdy równanie $m - m_0 = x \cdot F$ *nie ma* rozwiązania $x \in T \to \mathbb{N}$
- jeśli istnieje rozwiązanie, to iloczyn z dowolnym niezmiennikiem daje zero dla różnicy $m - m_0$
- ale również jeśli wszystkie niezmienniki dają iloczym zero, to można zbudować rozwiązanie

Niezmiennik tranzycji

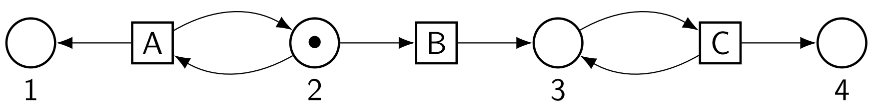
- $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$ – sieć miejsc i tranzycji
- def.: niezmiennik tranzycji – wektor $inv : T \to \mathbb{Z}$ taki, że $\forall\, p \in P.\, p \cdot inv = 0$,
- p traktujemy jako wektor nad T, $p(t) = F(p, t) - F(t, p)$ czyli $\forall\, p \in P.\, \Sigma_{t \in T} F(p, t) \cdot inv(t) = \Sigma_{t \in t} F(t, p) \cdot inv(t)$,
- przykład dla wzajemnego wykluczania: $T = \{A_1, Z_1, A_2, Z_2\}$, $inv = (1, 1, 0, 0)$
- Tw.: załóżmy $m[\sigma\rangle m'$, wówczas $m = m'$ wtedy i tylko wtedy gdy $P(\sigma)$ jest niezmiennikiem tranzycji ($P(\sigma)$ jest wektorem Parikha ciągu σ)

Sieci żywe i ograniczone

- Tw. jeśli sieć $\mathcal{N} = (P, T, F, m_0)$ jest jednocześnie żywa i ograniczona, to istnieje niezmiennik tranzycji inv taki, że $inv(t) > 0$ dla każdej tranzycji $t \in T$
- dw.: sieć jest żywa, każda tranzycja na pewno może wystąpić w przyszłości, więc istnieje jeden ciąg tranzycji $m_0[\sigma_1\rangle m_1[\sigma_2\rangle, \ldots,$ zawierający wszystkie tranzycje.
  Ciąg można dowolnie przedłużać, ale jest tylko skończenie wiele różnych zaznaczeń, muszą się powtarzać, tzn. $\exists i, j \in \mathbb{N}, i \neq j, m_i = m_j$ wówczas $P(\sigma_{i+1} \ldots \sigma_j)$ jest szukanym niezmiennikiem tranzycji

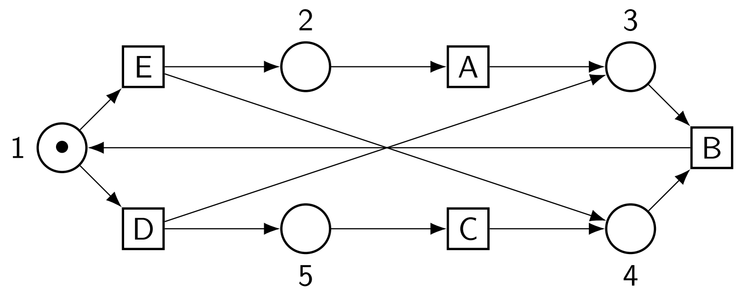
Techniki strukturalne

- def: *odpływ* – maksymalny zbiór miejsc $\mathcal{X} \subseteq P$ taki, że jeśli nie będzie w nim tokenów, to już na zawsze: $t^\bullet \cap \mathcal{X} \neq \emptyset$ implikuje ${}^\bullet t \cap \mathcal{X} \neq \emptyset$ równoważnie ${}^\bullet\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}^\bullet$
- def: *pułapka* – minimalny zbiór miejsc taki, że jeśli znajdzie się w nim token, to nigdy już nie będzie pusty: ${}^\bullet t \cap \mathcal{X} \neq \emptyset$ implikuje $t^\bullet \cap \mathcal{X} \neq \emptyset$ równoważnie $\mathcal{X}^\bullet \subseteq {}^\bullet\mathcal{X}$



- $\{2\}$ jest jednoelementowym odpływem, ${}^\bullet\{2\} = \{A\} \subseteq \{A, B\} = \{2\}^\bullet$ a $\{3\}$ jest pułapką, $\{3\}^\bullet = \{C\} \subseteq \{B, C\} = {}^\bullet\{3\}$

Przykład użycia



- zbiór $\{1, 3, 4\}$ jest pułapką: $\{1, 3, 4\}^\bullet = \{E, D, B\}$, ${}^\bullet\{1, 3, 4\} = \{B, A, D, E, C\}$
  już nigdy nie zostanie pusty, czyli zaznaczenie $(0, 1, 0, 0, 1)$ nie jest osiągalne