

Sieci Petriego

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

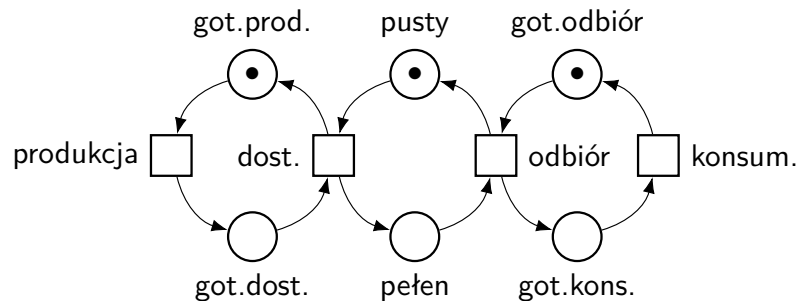
sem. letni 2025/2026

inf.ug.edu.pl/~amb/

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Sieci Petriego sem. letni 2025/2026 1 / 23

Sieci elementarne c.d.

Producent i konsument



- jedna sieć składająca się w naturalny sposób z trzech składowych
 - producent: gotowy do produkcji, gotowy do dostawy
 - bufor: pusty, pełen
 - konsument: gotowy do odbioru, gotowy do konsumpcji
- każda ze składowych wykonuje swój proces sekwencyjnie
- sieci połączone są wspólnymi zdarzeniami
- Pytanie: na ile ogólny jest to schemat?

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Sieci Petriego sem. letni 2025/2026 3 / 23

Sieci elementarne c.d.

o oparciu o materiały: G. Rozenberg, J. Engelfried *Elementary Net Systems*

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Sieci Petriego sem. letni 2025/2026 2 / 23

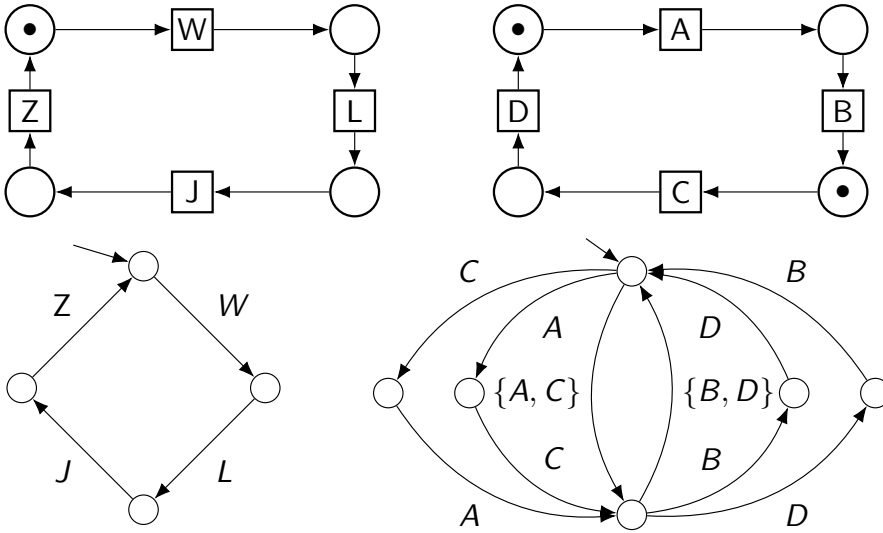
Sieci elementarne c.d. Systemy sekwencyjne

Systemy sekwencyjne

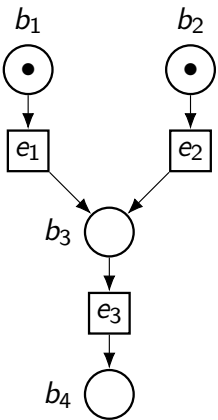
- def.: sieć $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ jest *systemem sekwencyjnym* w.t.w.
 $\forall C \in \mathcal{C}. |C| = 1$
- def.: sieć $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ jest *maszyną stanową* w.t.w.
 $\forall e \in E. |\bullet e| = |e \bullet| = 1$
- Tw.: jeśli $\mathcal{N}$ jest maszyną stanową taką, że $|C_0| = 1$, to $\mathcal{N}$ jest systemem sekwencyjnym
- Tw.: jeśli $\mathcal{N}$ jest zredukowanym systemem sekwencyjnym, to jest maszyną stanową
- dw.: gdyby $|\bullet e| + |e \bullet| > 2$, to $e \notin \text{use}(E)$, co jest niemożliwe
- Tw.: jeśli $\mathcal{N}$ jest silnie zredukowanym systemem sekwencyjnym, to $\mathcal{C} = \{\{b\} \mid b \in B\}$
- Tw.: jeśli $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$ są silnie zredukowanymi systemami sekwencyjnymi i $\mathcal{N} \approx \mathcal{N}'$, to $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}'$

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Sieci Petriego sem. letni 2025/2026 4 / 23

Sieć sekwencyjna i maszyna stanowa



Przykład niesekwencyjnego systemu bez współbieżności



- Lemat: jeśli $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ jest systemem sekwencyjnym, $\rho, \sigma, \tau \in E^*$, $e \in E$ i $\rho e, \sigma e, \tau e \in FS(\mathcal{N})$, to $\sigma\tau \in FS(\mathcal{N})$
- dw.: jeśli $C_0[\rho]C$ i $C_0[\sigma]C'$, to $C = C' = \bullet e$ jeśli $\rho\tau$ jest możliwe, to również $\sigma\tau$
- w przykładzie $FS(\mathcal{N}) = \{\varepsilon, e_1, e_1 e_3, e_1 e_3 e_2, e_2, e_2 e_3, e_2 e_3 e_1\}$
- teza lematu nie jest spełniona, $\rho = e_1$, $\sigma = e_2$, $e = e_3$, $\tau = e_3 e_2$
- ten system nie jest nawet bisymulacyjny równoważny sekwencyjnemu

Inne podejście do sekwencyjności

- def.: sieć $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ nie dopuszcza współbieżności jeśli niemożliwa jest sytuacja $C \in \mathcal{C}$, $e_1, e_2 \in E$, $C[\{e_1, e_2\}]$
- system sekwencyjny nie dopuszcza współbieżności – dwa zdarzenia jednocześnie potrzebują dwóch tokenów
- system obserwacyjnie równoważny z sekwencyjnym również nie dopuszcza współbieżności – w grafie konfiguracji nie ma kwadratów przemennych

Podsieci

- def.: sieć $\mathcal{N}' = (B', E', F', C'_0)$ nazywamy podsiecią $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ jeśli
 - $B' \subseteq B$, $E' \subseteq E$, $F' \subseteq F$, $C'_0 = C_0 \cap B'$
 - $\forall b \in B'. \forall e \in E. (b, e) \in F \Rightarrow e \in E', (b, e) \in F' \Rightarrow e \in E', (e, b) \in F \Rightarrow e \in E', (e, b) \in F'$ (jeśli zdarzenie dotyczy warunku podsieci, to jest zachowane)
- podsieć $\mathcal{N}'$ nazywamy składową sekwencyjną sieci $\mathcal{N}$ jeśli $\mathcal{N}'$ jest siecią sekwencyjną
- sieć $\mathcal{N}'$ jest podsiecią $\mathcal{N}$ wyznaczoną poprzez zbiór warunków/miejsc jeśli $B' \subseteq B$, $E' = \mathbf{nbh}(B')$, $F' = F \cap ((B' \times E') \cup (E' \times B'))$, $C'_0 = C_0 \cap B'$
- Tw.: podsieć $\mathcal{N}'$ jest zawsze wyznaczona przez zbiór swoich warunków
 - $\forall e \in E'. (\bullet e)_{\mathcal{N}'} = (\bullet e)_{\mathcal{N}} \cap B'$, $(e \bullet)_{\mathcal{N}'} = (e \bullet)_{\mathcal{N}} \cap B'$
 - $\forall e \in E \setminus E'. \mathbf{nbh}(e) \cap B' = \emptyset$
 - $\forall b \in B'. (\bullet b)_{\mathcal{N}'} = (\bullet b)_{\mathcal{N}}$, $(b \bullet)_{\mathcal{N}'} = (b \bullet)_{\mathcal{N}}$

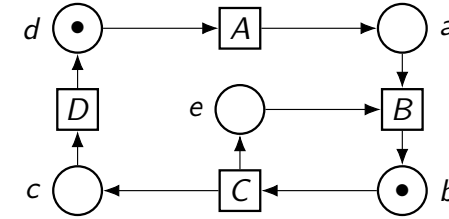
Podsieci c.d.

- przykład $E = \{e\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $F = \{(b_1, e), (e, b_2)\}$, $B' = \{b_1\}$, $C_0 = \{b_1\}$
po zastosowaniu konstrukcji do $B' = \{b_1\}$ otrzymamy $E' = \{e\}$, $F' = \{(b_1, e)\}$, $C'_0 = \{b_1\}$
nie będzie to w ogóle sieć, ponieważ $e^\bullet = \emptyset$ wbrew definicji sieci (elementarnej)
- Tw.: dana sieć $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$, podzbiór $B' \subseteq B$ wyznacza podsieć w.t.w. ${}^\bullet B' = B'^\bullet$
- dw.: ($\Rightarrow$) niech $e \in {}^\bullet B'$ czyli $\exists b \in B'. (e, b) \in F$. $\mathcal{N}'$ jest podsiecią czyli $(e, b) \in F'$, definicja sieci wymusza, że $\exists b' \in B'. (b', e) \in F'$ czyli $e \in B'^\bullet$
($\Leftarrow$) jeśli podzbiór $B' \subseteq B$ spełnia ${}^\bullet B' = B'^\bullet$, to sprawdzamy, że definicja wyznaczenia podsieci prowadzi rzeczywiście do sieci $\mathcal{N}'$
- uwaga: warunek ${}^\bullet B' = B'^\bullet$ jest równoważny
 $\forall e \in E. {}^\bullet e \cap B' \neq \emptyset \Leftrightarrow e^\bullet \cap B' \neq \emptyset$

Graf konfiguracji podsieci

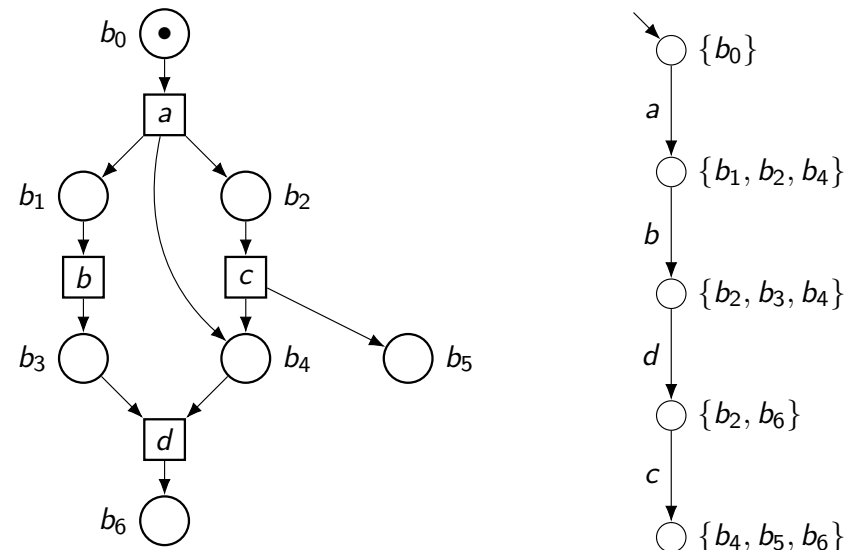
- Tw.: niech sieć $\mathcal{N}' = (B', E', F', C'_0)$ będzie podsiecią $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$, wówczas
 - jeśli $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}$, to $C \cap B' \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}'}$
 - jeśli $e \in E'$, $e \in \text{use}(E)$, to $e \in \text{use}(E')$
- dw.: dla C_0 jest to część definicji.
dowód indukcyjny zachodzi ponieważ $C[e]C_1$ implikuje $C \cap B'[e]C_1 \cap B'$ i jeśli $C \cap B' \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}'}$ to również $C_1 \cap B' \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}'}$
jeśli zdarzenie $e \in E'$ mogło zajść w $\mathcal{N}$, to ma sąsiedztwo z B' , gwarantuje ono, że może zajść również w $\mathcal{N}'$
- operacja $C \mapsto C \cap B'$ nie musi być różnowartościowa ani surjekcją

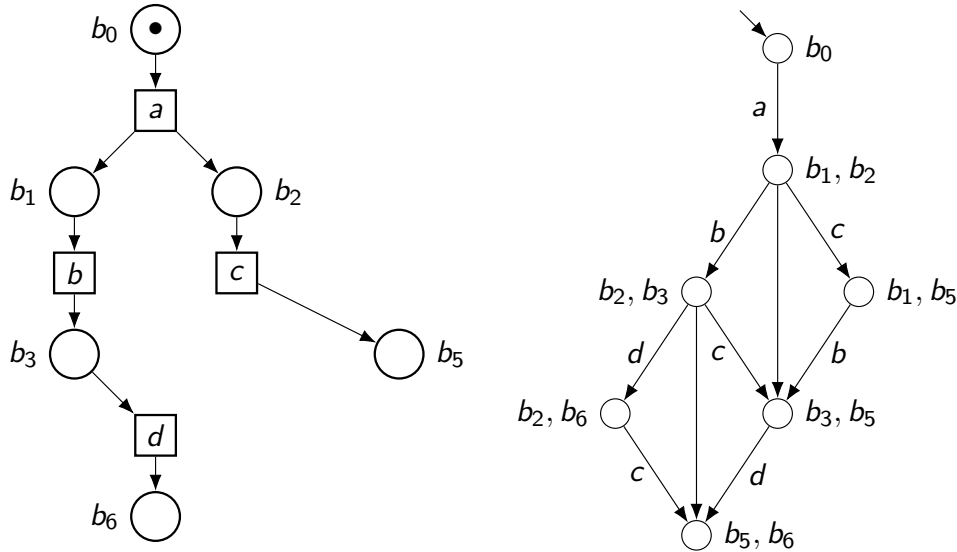
Przykład



- zbiór $\{b, e\}$ wyznacza podsieć sieci na rysunku, jest ona sekwencyjna czyli jest to składowa sekwencyjna
- podzbiór $\{a, b, c, d\}$ wyznacza inną podsieć, nie jest jednak ona sekwencyjna
- nie ma innych (nietrywialnych) podsieci dla tej sieci

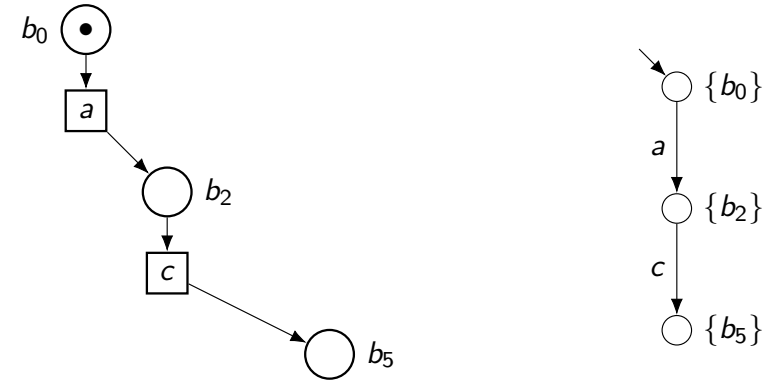
Przykład większy, $\mathcal{N}_0$



Przykład większy c.d., $\mathcal{N}_1$ 

Przykład większy, wnioski

- $\mathcal{N}_1$ jest podsiecią $\mathcal{N}_0$, wyznaczoną przez $B \setminus \{b_4\}$
- sieć $\mathcal{N}_0$ nie ma współbieżności, podsieć $\mathcal{N}_1$ dopuszcza współbieżność
- konfiguracja $\{b_1, b_5\}$ nie pochodzi od żadnej konfiguracji w $\mathcal{N}_0$,
 $\{b_1, b_5\} \notin \mathcal{C}_{\mathcal{N}_0}$, $\{b_1, b_4, b_5\} \notin \mathcal{C}_{\mathcal{N}_0}$
- $\mathcal{N}_2$ jest podsiecią, jest wyznaczony przez $\{b_0, b_2, b_5\}$, jest składową sekwencyjną
- wiele konfiguracji w $\mathcal{C}_{\mathcal{N}_0}$ daje $\{b_2\}$

Przykład większy III, $\mathcal{N}_2$ 

Składowe sekwencyjne

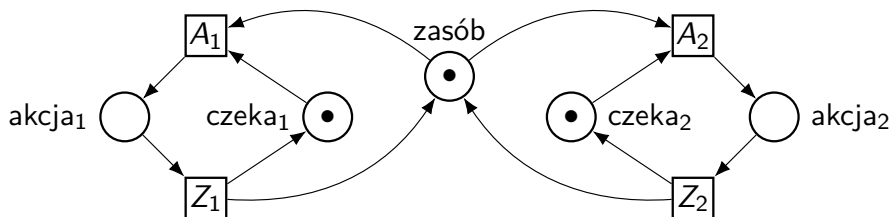
- Tw.: niech $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ będzie siecią zredukowaną, $B' \subseteq B$. Wówczas równoważne są warunki
 - B' wyznacza składową sekwencyjną w $\mathcal{N}$
 - $|C \cap B'| = 1$ dla wszystkich $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}$
 - $|C_0 \cap B'| = 1$ oraz $\forall e \in E$ albo $|\bullet e \cap B'| = |e \bullet \cap B'| = 1$ albo $|\bullet e \cap B'| = |e \bullet \cap B'| = 0$
- dw.: $(1 \Rightarrow 2)$: $C \cap B' \in \mathcal{N}'$ i jako konfiguracja sieci sekwencyjnej ma jeden element
 $(2 \Rightarrow 3)$ $e \in E = \text{use}(E)$ czyli $C[e]D$ dla pewnych konfiguracji $C, D \in \mathcal{N}$. Stąd $|\bullet e \cap B'| \leq 1$, $|\bullet e \cap B'| = |e \bullet \cap B'|$
 $(3 \Rightarrow 1)$ $\bullet B' = B' \bullet$ więc B' wyznacza podsieć, skoro $|C_0 \cap B'| = 1$ to będzie to dotyczyć dalszych konfiguracji, czyli $\mathcal{N}'$ jest siecią sekwencyjną
- jeśli zachodzi jedynie warunek $\forall e \in E$ albo $|\bullet e \cap B'| = |e \bullet \cap B'| = 1$ albo $|\bullet e \cap B'| = |e \bullet \cap B'| = 0$, to $\mathcal{N}'$ nazywamy składową *maszyną stanową*

Składowe sekwencyjne są niepodzielne

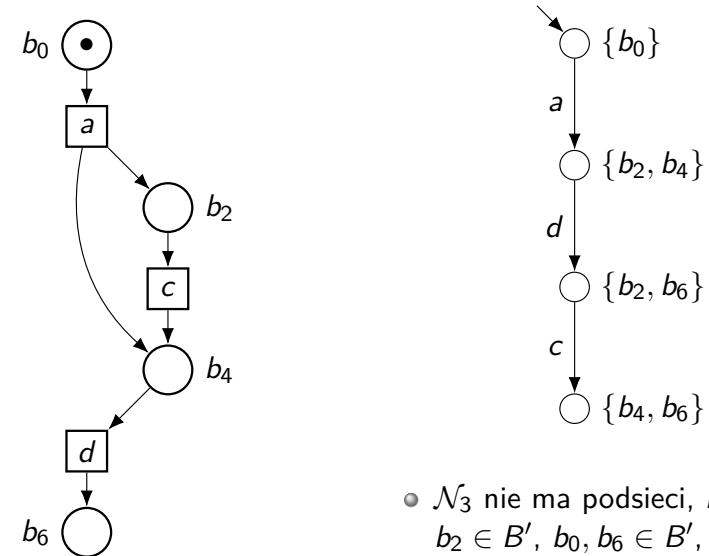
- Tw.: niech $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ będzie silnie zredukowaną siecią sekwencyjną, $B' \subseteq B$ wyznacza podsieć. Wówczas $B' = B$ albo $B' = \emptyset$
- dw.: $\mathcal{C}_{\mathcal{N}} = \{\{b\} \mid b \in B\}$, $C_0 = \{b_0\}$, tranzycje są postaci $\{b_1\} [e] \{b_2\}$. $\bullet B' = B' \bullet$, czyli $b_1 \in B'$ w.t.w. $b_2 \in B'$, niech $b' \in B'$, $\{b'\} \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ czyli $\{b_0\} [\omega] \{b'\}$ dla pewnego $\omega \in E^*$. Stąd również $b_0 \in B'$, a idąc wprzód dowolne $b \in B$ spełnia $b \in B'$.
- Tw.: niech $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ będzie siecią silnie zredukowaną, a $B' \subseteq B$ wyznacza składową sekwencyjną $\mathcal{N}'$. Wówczas $\mathcal{N}'$ nie ma nietrywialnych podsieci
- dw.: $\mathcal{N}'$ jest również zredukowana i również nie ma izolowanych miejsc czyli nie może mieć nietrywialnych podsieci.
- ale odwrotna zależność nie zachodzi, podsieć może nie mieć dalszych podsieci i nie być składową sekwencyjną

Pokrycia

- $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ sieć elementarna, *pokryciem* jest zbiór podsieci $\{\mathcal{N}_i = (B_i, E_i, F_i, (C_0)_i) \mid i = 1, \dots, k\}$ taki, że $B = \bigcup_{i=1}^k B_i$, $E = \bigcup_{i=1}^k E_i$, $F = \bigcup_{i=1}^k F_i$, $C_0 = \bigcup_{i=1}^k (C_0)_i$
- jest to pokrycie składowymi sekwencyjnymi, jeśli wszystkie podsieci są sekwencyjne
- uwaga: podsieć jest wyznaczona przez zbiór miejsc, wystarczy sprawdzić jedynie $\bigcup \{B_i \mid i \leq k\} = B$
- trzy składowe sekwencyjne: $\{\text{akcja}_1, \text{czeka}_1\}$, $\{\text{akcja}_2, \text{czeka}_2\}$, $\{\text{zasób}, \text{akcja}_1, \text{akcja}_2\}$



Przykład większy znowu, $\mathcal{N}_3$



- $\mathcal{N}_3$ nie ma podsieci, $b_4 \in B' \Rightarrow b_2 \in B'$, $b_0, b_6 \in B'$, i nie jest sekwencyjna, $|a^\bullet \cap B'| > 1$

Pokrycia c.d.

- sieć nie musi mieć wcale pokrycia składowymi sekwencyjnymi
- $\mathcal{N}_1$ oraz $\mathcal{N}_3$ jest pokryciem $\mathcal{N}_0$ z przykładu, żadna z tych odsieci nie jest sekwencyjna
- $\mathcal{N}_1$ można podzielić na składowe sekwencyjne, ale $\mathcal{N}_3$ nie ma swoich podsieci, czyli $\mathcal{N}$ nie ma pokrycia składowymi sekwencyjnymi
- Tw.: dla każdej sieci $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ istnieje sieć zredukowana $\mathcal{N}'$ równoważna behawioralnie i mająca pokrycie składowymi sekwencyjnymi
- dw.: zaczynamy od redukcji $\mathcal{N}$, tzn. można dalej założyć, że $\mathcal{N}$ jest już zredukowana

Konstrukcja pokrycia sekwencyjnego

- $b, b' \in B$ są dualne do siebie, ozn. $b' \dashv b$ jeśli
 $\forall e \in E. b \in \bullet e \Leftrightarrow b' \in e^\bullet$
 jeśli sieć jest B -prosta, każdy warunek ma najwyżej jeden dualny
- Lemat: $\forall b, b' \in B. \{b, b'\}$ jest składową sekwencyjną w.t.w.
 $|\{b, b'\} \cap C_0| = 1$ i $b' \dashv b$
 dw.: warunek wcześniejszego twierdzenia dla zbioru dwuelementowego
 sprowadza się do $b' \dashv b$
- $|\{b, b'\} \cap C_0| = 1$ jest automatycznie spełnione, jeśli sieć jest silnie zredukowana
- dla każdego miejsca $b \in B$ konstruujemy nowe miejsce b' w ten sposób by było dualne do b otrzymując nową sieć $\mathcal{N}'$
- izomorfizm grafów konfiguracji $\beta : \mathcal{C}_{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{N}'}$ jest definiowany
 $\beta(C) = C$ jeśli $b \in C$ oraz $\beta(C) = C \cup \{b'\}$ w p.p.
 sprawdzamy $\beta(C)[e] \Rightarrow C[e]$ oraz $C[e]D \Rightarrow \beta(C)[e]\beta(D)$
- każde miejsce b będzie należeć do sekwencyjnej składowej $\{b, b'\}$

Pokrycia sekwencyjne c.d.

- Tw.: $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ sieć elementarna zredukowana z pokryciem składowymi sekwencyjnymi jest bezkontaktowa
- dw.: niech $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}, e \in E, \bullet e \subseteq C$, założymy $b \in e^\bullet \cap C$.
 b jest pokryte składową sekwencyjną B' czyli $b \in e^\bullet \cap B'$,
 z wcześniejszego twierdzenia $|e^\bullet \cap B'| = |\bullet e \cap B'| = 1$ ale dla miejsca dualnego $b' \dashv b, b' \in \bullet e \cap B' \subseteq C \cap B'$, czyli $|C \cap B'| > 1$ wbrew twierdzeniu o sekwencyjnych składowych
- twierdzenie odwrotne nie zachodzi, sieć może być bezkontaktowa mimo braku pokrycia składowymi sekwencyjnymi

Znane już przykłady

