Sieci Petriego

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

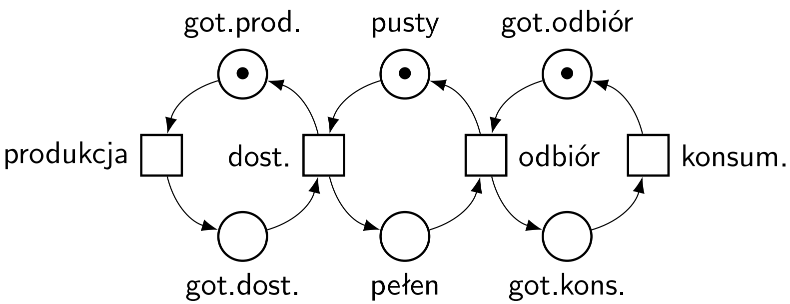
sem. letni 2023/2024

`inf.ug.edu.pl/~amb/`

Sieci elementarne c.d.

o oparciu o materiały: G. Rozenberg, J. Engelfried *Elementary Net Systems*

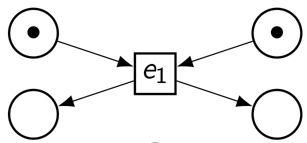
Producent i konsument



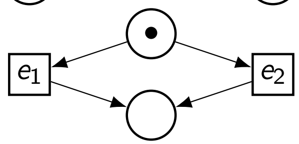
- jedna sieć składająca się w naturalny sposób z trzech składowych
  – producent: gotowy do produkcji, gotowy do dostawy
  – bufor: pusty, pełen
  – konsument: gotowy do odbioru, gotowy do konsumpcji
- każda ze składowych wykonuje swój proces sekwencyjnie
- sieci połączone są wspólnymi zdarzeniami
- Pytanie: na ile ogólny jest to schemat?

Sieci elementarne, (trochę inna) definicja

- $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$
  – $F \subseteq (B \times E) \cup (E \times B)$, pojemność miejsc jest 1
  – dopuszcza się $B = E = \emptyset$ ale $\forall\, e \in E.\, {}^\bullet e \neq \emptyset, e^\bullet \neq \emptyset$
  – dopuszcza się izolowane warunki/miejsca, choć są one niepotrzebne
  – nie dopuszcza się krótkich pętli, tzn. $\forall\, e \in E.\, {}^\bullet e \cap e^\bullet = \emptyset$
- sieć jest *B-prosta* jeśli $({}^\bullet x, x^\bullet) = ({}^\bullet y, y^\bullet)$ implikuje $x = y$ dla $x, y \in B$
- sieć jest *E-prosta* jeśli $({}^\bullet x, x^\bullet) = ({}^\bullet y, y^\bullet)$ implikuje $x = y$ dla $x, y \in E$



- nie jest B-prosta
- i nie ma sensu duplikować warunków



- nie jest E-prosta
- ale zdarzenia e_1 i e_2 mają swoją tożsamość i chcemy je odróżniać

Kilka definicji

- $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$
- otoczenie miejsca czy tranzycji: $\mathbf{nbh}(x) = {}^\bullet x \cup x^\bullet$
- zdarzenie/tranzycja jest pożyteczna jeśli jest L_1-żywa, tzn. $e \in \mathbf{use}(E)$ w.t.w. $\exists\, \sigma \in E^*.\ C_0[\sigma e\rangle$

Równoważności sieci

- relacja zwrotna, symetryczna i przechodnia
- sieci są równoważne, jeśli są podobne/zachowują się podobnie/mają podobne własności
- definicje równoważności mogą polegać na analizie budowy sieci lub na analizie zachowań sieci

- próba normalizacji tzn. poszukiwanie sieci równoważnej ale o lepiej zrozumiałej strukturze/budowie

Równoważność strukturalna i behawioralna

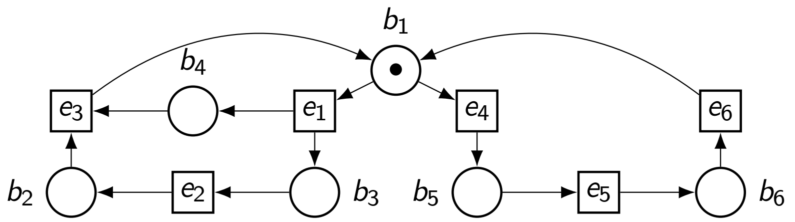
- dane sieci $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ oraz $\mathcal{N}' = (B', E', F', C_0')$
- są izomorficzne, $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}'$ w.t.w. istnieją bijekcje $\beta : B \to B'$, $\eta : E \to E'$ takie, że
  – $\forall\, b \in B, e \in E.\, (b, e) \in F \Leftrightarrow (\beta(b), \eta(e)) \in F'$
  – $\forall\, b \in B, e \in E.\, (e, b) \in F \Leftrightarrow (\eta(e), \beta(b)) \in F'$
  – $\beta(C_0) = C_0'$

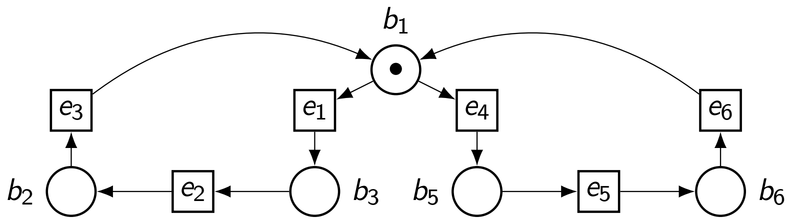
- ich konfiguracje osiągalne to $\mathcal{C} = [C_0\rangle$ oraz $\mathcal{C}' = [C_0'\rangle$
- są behawioralnie izomorficzne, $\mathcal{N} \approx \mathcal{N}'$ w.t.w. istnieją bijekcje $\beta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, $\eta : \mathbf{use}(E) \to \mathbf{use}(E')$ takie, że
  – $\beta(C_0) = C_0'$
  – $\forall\, C, D \in \mathcal{C}, e \in \mathbf{use}(E).\, C[e\rangle D \Leftrightarrow \beta(C)[\eta(e)\rangle\beta(D)$
- czyli izomorfizm jest na poziomie (sekwencyjnych) grafów konfiguracji
- Tw.: jeśli $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}'$, to $\mathcal{N} \approx \mathcal{N}'$

Grafy konfiguracji

- sieć $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$
- rozważamy dwa rodzaje grafów konfiguracji sieci elementarnych
  – sekwencyjne, $SCG(\mathcal{N})$, wierzchołkami są konfiguracje osiągalne $\mathcal{C} = [C_0\rangle$, krawędziami (etykietowanymi) $C[e\rangle D$ dla $C, D \in [C_0\rangle$, $e \in E$ (wówczas $e \in \mathbf{use}(E)$)
  – pełne grafy, $CG(\mathcal{N})$, wierzchołki są te same ale krawędziami są również współbieżne wykonania zdarzeń, $C[\mathcal{U}\rangle D$
- Tw.: grafy sekwencyjne $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$ są równoważne w.t.w. grafy pełne są równoważne
  dw.: $\Leftarrow$: izomorfizm grafów pełnych w szczególności dotyczy zdarzeń pojedynczych czyli daje izomorfizm grafów sekwencyjnych
  $\Rightarrow$: izomorfizm grafów sekwencyjnych zachowuje wszystkie własności grafów konfiguracji, współbieżne wykonanie zdarzeń da się odtworzyć na podstawie wykonania pojedynczych zdarzeń
- wniosek: behawioralny izomorfizm sieci gwarantuje izomorfizm obu rodzajów grafów konfiguracji

Sieci behawioralnie równoważne





- $\beta(\{b_3, b_4\}) = b_3, \beta(\{b_2, b_4\}) = b_2, \beta(b_i) = b_i$ dla $i = 1, 5, 6$

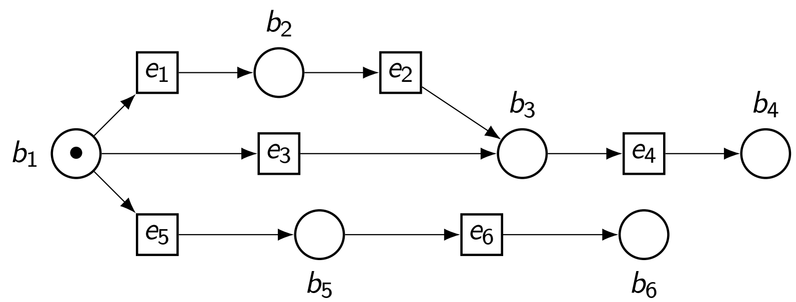
Lemat

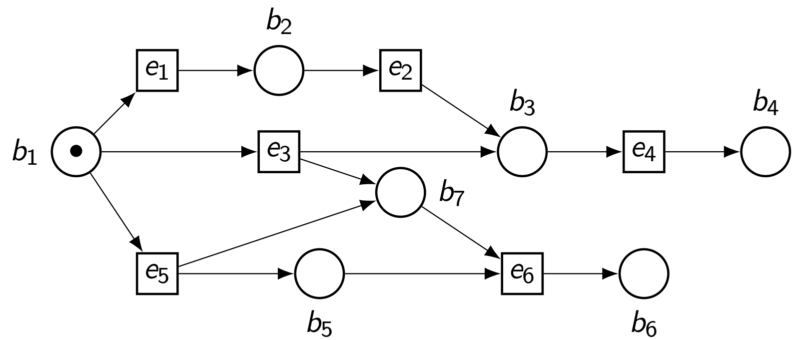
- dane sieci $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ oraz $\mathcal{N}' = (B', E', F', C_0')$
  funkcja różnowartościowa $\beta : \mathcal{C} \to \mathcal{P}(B')$
  oraz bijekcja $\eta : \mathbf{use}(E) \to \mathbf{use}(E')$ takie że:
  – $\beta(C_0) = C_0'$
  – $\forall\, C, D \in \mathcal{C}, e \in \mathbf{use}(E).\ C[e\rangle D \Rightarrow \beta(C)[\eta(e)\rangle\beta(D)$
  i $\beta(C)[\eta(e)\rangle \Rightarrow C[e\rangle$
- wówczas $\mathcal{N} \approx \mathcal{N}'$, izomorfizm jest zadany przez (β, η)
- dw.: starannie sprawdzamy szczegóły definicji
  np. $\beta(C)[\eta(e)\rangle\beta(D) \Rightarrow \beta(C)[\eta(e)\rangle \Rightarrow C[e\rangle \Rightarrow C[e\rangle D' \Rightarrow \beta(C)[\eta(e)\rangle\beta(D') \Rightarrow D = D'$
  podobnie sprawdzamy, że $\beta(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}'$, co więcej $\beta(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$

Słabsza równoważność – bisymulacja

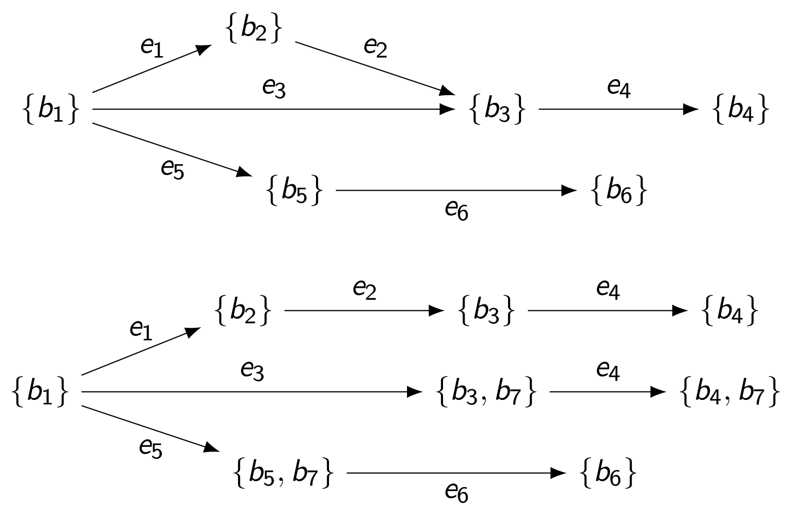
- dane sieci $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ oraz $\mathcal{N}' = (B', E', F', C_0')$
- nie zakładamy, że jest bijekcja $\beta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, jedynie relacja $\beta \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$
- sieci są *obserwacyjnie równoważne*, $\mathcal{N} \sim \mathcal{N}'$, jeśli istnieje bisymulacja $\beta \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ oraz bijekcja $\eta : \mathbf{use}(E) \to \mathbf{use}(E')$ takie, że:
  – $\beta(C_0, C_0')$
  – $\forall\, C, D \in \mathcal{C}, C' \in \mathcal{C}', e \in \mathbf{use}(E).\ C[e\rangle D, \beta(C, C') \Rightarrow C'[\eta(e)\rangle D'$ dla pewnego $D' \in \mathcal{C}'$ takiego, że $\beta(D, D')$
  – analogiczny warunek w drugą stronę
  $\forall\, C', D' \in \mathcal{C}', C \in \mathcal{C}, e' \in \mathbf{use}(E').\ C'[e'\rangle D', \beta(C, C') \Rightarrow C[\eta^{-1}(e')\rangle D$
  dla pewnego $D \in \mathcal{C}$ takiego, że $\beta(D, D')$
- czyli można symulować przejścia w jednej sieci za pomocą przejść drugiej sieci i na odwrót
- Tw.: jeśli $\mathcal{N} \approx \mathcal{N}'$, to $\mathcal{N} \sim \mathcal{N}'$
  dw.: bijekcja β jest oczywiście relacją bisymulacji

Przykład, sieci obserwacyjnie równoważne





Przykład – grafy konfiguracji



Przykład c.d.

- przykładowe sieci moją nieizomorficzne grafy konfiguracji
- górna sieć ma jedną konfigurację umożliwiającą e_4, mianowicie $\{b_3\}[e_4\rangle\{b_4\}$, do tej konfiguracji możemy dotrzeć na dwa sposoby, ciągiem $e_1 e_2$ lub e_3
- w dolnej sieci te ciągi produkują dwie różne konfiguracje, $\{b_3\}$ oraz $\{b_3, b_7\}$
- obie konfiguracje są w relacji bisymulacji, zostały otrzymane w analogicznych ciągach i umożliwiają analogiczne dalsze zdarzenia
- nie ma izomorfizmu grafów ale warunki bisymulacji są spełnione

Ciągi zdarzeń

- dane sieci $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ oraz $\mathcal{N}' = (B', E', F', C_0')$
- def.: $FS(\mathcal{N}) = \{\omega \in E^* \mid C_0[\omega\rangle\}$, oczywiście $FS(\mathcal{N}) \subseteq (\mathbf{use}(E))^*$
- def.: $\mathcal{N} \sim_{fs} \mathcal{N}'$ w.t.w. istnieje bijekcja $\eta : \mathbf{use}(E) \to \mathbf{use}(E')$ taka, że $\eta(FS(\mathcal{N})) = FS(\mathcal{N}')$
- w przykładzie powyższym
  $FS(\mathcal{N}) = \{\varepsilon, e_1, e_1 e_2, e_1 e_2 e_4, e_3, e_3 e_4, e_5, e_5 e_6\}$ $FS(\mathcal{N}') = FS(\mathcal{N})$
  $\eta : FS(\mathcal{N}) \to FS(\mathcal{N}')$ jest identycznością
- Tw.: $\mathcal{N} \sim_{fs} \mathcal{N}'$ w.t.w. $\mathcal{N} \sim \mathcal{N}'$
- w definicji $\sim_{fs}$ nie ma mowy o konfiguracjach, mimo to równość zbiorów ciągów zdarzeń generuje relację pomiędzy konfiguracjami, które można wyliczyć z takich ciągów

Równoważność ciągów zdarzeń – dowód

- $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$, $\mathcal{N}' = (B', E', F', C_0')$, $\mathcal{N} \sim_{fs} \mathcal{N}' \Leftrightarrow \mathcal{N} \sim \mathcal{N}'$
- $\Leftarrow$: dane są bisymulacja $\beta \subseteq B \times B'$, bijekcja $\eta : \mathbf{use}(E) \to \mathbf{use}(E')$
  – pokazujemy, że $\eta(FS(\mathcal{N})) \subseteq FS(\mathcal{N}')$, stosując do bijekcji odwrotnej otrzymamy równość
  – z definicji obserwacyjnej równoważności wynika, że
  $\forall\, C, D \in \mathcal{C}, C' \in \mathcal{C}', \omega \in (\mathbf{use}(E))^*.\ C[\omega\rangle D, \beta(C, C') \Rightarrow C'[\eta(\omega)\rangle D'$
  dla pewnego $D' \in \mathcal{C}'$ takiego, że $\beta(D, D')$
  – w szczególności starując z konfiguracji początkowych, które spełniają $(C_0, C_0') \in \beta$ widać $\omega \in FS(\mathcal{N}) \Rightarrow \eta(\omega) \in FS(\mathcal{N}')$
- $\Rightarrow$: dana jest bijekcja $\eta : \mathbf{use}(E) \to \mathbf{use}(E')$, która rozciąga się na ciągi wykonań
  – definiujemy bisymulację $\beta \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ wzorem
  $(C, C') \in \beta \Leftrightarrow \exists\, \omega \in (\mathbf{use}(E))^*.\ C_0[\omega\rangle C, C_0'[\beta(\omega)\rangle C'$
  – wówczas $\beta(C_0, C_0')$ wynika z definicji gdy $\omega = \varepsilon$
  – jeśli wiadomo, że $C_0[\omega\rangle C$, $C_0'[\beta(\omega)\rangle C'$ oraz $C[e\rangle D$, to $C_0[\omega e\rangle D$, $C_0'[\eta(\omega e)\rangle D'$, czyli $\beta(D, D')$

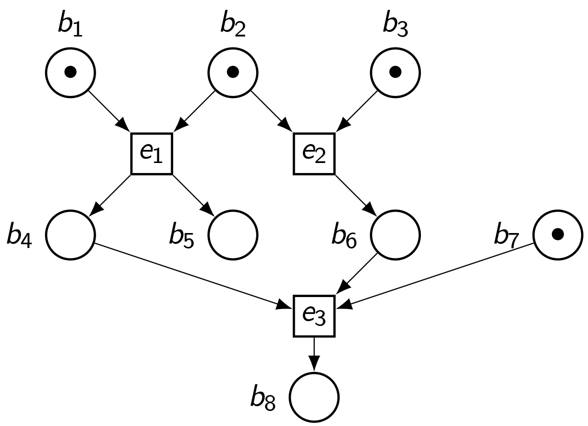
Równoważności sieci

- izomorfizm sieci: $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}'$
- izomorfizm grafów konfiguracji (równoważność behawioralna): $\mathcal{N} \approx \mathcal{N}'$
- bisymulacja (równoważność obserwacyjna): $\mathcal{N} \sim \mathcal{N}'$
- izomorfim ciągów wykonań: $\mathcal{N} \sim_{fs} \mathcal{N}'$
- Tw. $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}' \Rightarrow \mathcal{N} \approx \mathcal{N}' \Rightarrow \mathcal{N} \sim \mathcal{N}' \Leftrightarrow \mathcal{N} \sim_{fs} \mathcal{N}'$

Redukcja sieci

- $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$
- def.: sieć $\mathcal{N}$ jest zredukowana jeśli $\mathbf{use}(E) = E$
  – nie ma niepotrzebnych zdarzeń/tranzycji
- def.: sieć $\mathcal{N}$ jest silnie zredukowana jeśli $\forall\, b \in B.\, \mathbf{nbh}(b) \neq \emptyset$
  – nie ma izolowanych warunków/miejsc
- Tw.: dla każdej sieci $\mathcal{N}$ istnieje silnie zredukowana sieć $\mathcal{N}'$ taka, że $\mathcal{N} \approx \mathcal{N}'$
- dw.: najpierw usuwamy niepotrzebne zdarzenia, tzn. $E' = \mathbf{use}(E)$, $F' = F \cap ((B \times E') \cup (E' \times B))$
  – graf konfiguracji pozostaje niezmieniony
  – być może powstały/zostały izolowane miejsca
  – usuwamy izolowane miejsca, tzn. $B' = \{b \in B \mid \mathbf{nbh}(b) \neq \emptyset\}$, $C_0' = C_0 \cap B'$
  – definijemy bijekcję na konfiguracjach osiągalnych $\beta(C) = C \cap B'$
  – razem z $\eta =$ identyczność daje to izomorfizm grafów konfiguracji

Przykład redukcji

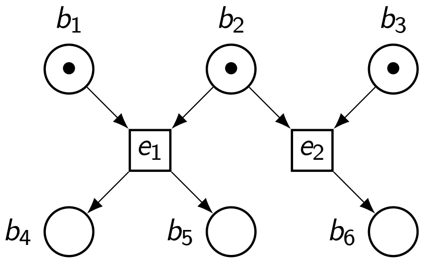


- zdarzenie e_3 nie ma szans zajść, potrzebuje dwóch warunków b_4 i b_6 zasilanych przez e_1 i e_2 ale oba potrzebują b_2, każde wyklucza drugie
- po usunięciu e_3 jest zredukowana, miejsca b_7 i b_8 są izolowane
- po usunięciu miejsc izolowanych, sieć jest silnie zredukowana

Własności sieci silnie zredukowanych

- Tw.: niech $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ będzie silnie zredukowana. Wówczas $\forall\, b \in B.\, \exists\, C, D \in \mathcal{C}.\, b \in C, b \notin D$
- dw.: b nie jest izolowanym, więc $\exists\, e \in \mathbf{nbh}(b)$
  każde zdarzenie jest pożyteczne, więc $\exists\, A \in \mathcal{C}.\, A[e\rangle A'$
  jeśli $e \in {}^\bullet b$, to $b \notin A, b \in A$ a jeśli $e \in b^\bullet$, to zachodzi przeciwna sytuacja
- Tw.: Dla każdej sieci silnie zredukowanej istnieje obserwacyjnie równoważna sieć silnie zredukowana B-prosta
- dw.: jeśli $({}^\bullet b, b^\bullet) = ({}^\bullet b', b'^\bullet)$ to najpierw sprawdzamy, że w każdym zaznaczeniu oba miejsca albo są jednocześnie zaznaczone albo nie. Gdyby tak nie było, zdarzenia w otoczeniu nie mogłyby być wykonane. Następnie usuwamy dowolne z tych miejsc z oczywistym izomorfizmem grafów zaznaczeń.

Przykład dalszej redukcji



- sieć zredukowana nie jest B-prosta, miejsca b_4 i b_5 grają identyczną rolę, np. b_5 można usunąć