Sieci Petriego

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

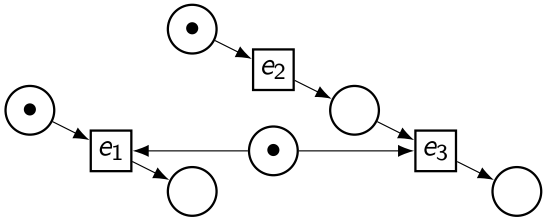
sem. letni 2023/2024

inf.ug.edu.pl/~amb/

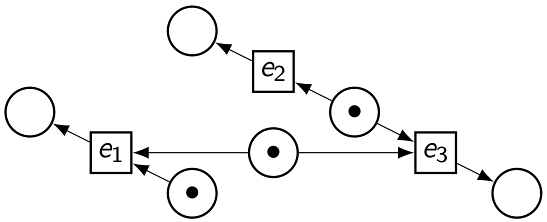
Konfuzja

- $\mathcal{N}$ – system elementarny, $C \in \mathcal{C}$, $e \in E$, zachodzi $C[e\rangle$
  def: $\mathit{cfl}_C(e) = \{e' \in E \mid C[e'\rangle$ ale nie $C[\{e, e'\}\rangle\}$
  zbiór zdarzeń skonfliktowanych (w danej konfiguracji)
- e_1 i e_2 są w konfuzji w C jeśli $C[\{e_1, e_2\}\rangle$
  ale $\mathit{cfl}_C(e_1) \neq \mathit{cfl}_{C'}(e_1)$ gdzie $C[e_2\rangle C'$
  – oba zdarzenia można wykonać w dowolnej kolejności ale po wykonaniu e_2 sytuacja dla e_1 zmienia się
  – być może po wykonaniu e_2 będzie możliwe zdarzenie skonfliktowane z e_1
  – albo na odwrót, przestanie byc skonfliktowane

Konfuzja, przykłady



przed wykonaniem e_2 $\mathit{cfl}(e_1) = \emptyset$, po wykonaniu e_2 $\mathit{cfl}(e_1) = \{e_3\}$



przed wykonaniem e_2 $\mathit{cfl}(e_1) = \{e_3\}$, po wykonaniu e_2 $\mathit{cfl}(e_1) = \emptyset$

Przestrzeń stanów systemu elementarnego

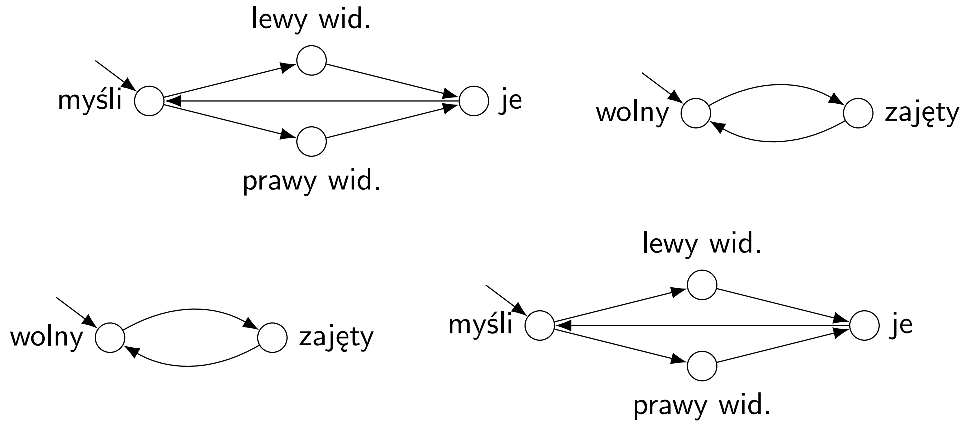
- $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ – system elementarny
- def. *graf konfiguracji* – graf skierowany, ukorzeniony, z etykietowanymi krawędziami
  – zbiór wierzchołków: $\mathcal{C} = [C_0\rangle$ – konfiguracje osiągalne z C_0
  – wierzchołek wyróżniony: C_0 – konfiguracja początkowa
  – krawędź od C do C' dla $C, C' \in \mathcal{C}$: możliwość zajścia zbioru zdarzeń współbieżnych $C[\mathcal{U}\rangle C'$
  – etykieta krawędzi: zbiór zdarzeń $\mathcal{U}$ powodujących takie przejście
- def. *graf sekwencyjny* – j.w. ale rozpatruje się tylko pojedyncze zdarzenia
  – tzn. krawędziami są tylko $C[e\rangle C'$ dla $C, C' \in \mathcal{C}$, $e \in E$
  – krawędzi jest mniej, ale jeśli $C[\mathcal{U}\rangle C'$ to dowolne uporządkowanie zdarzeń z $\mathcal{U}$ wskaże ścieżkę w grafie sekwencyjnym od C do C'

Grafy konfiguracji

- graf sekwencyjny ma tylko niektóre krawędzie i niektóre etykiety grafu konfiguracji
- graf konfiguracji da się odtworzyć z grafu sekwencyjnego
  dw.: tw. o współbieżności, odnajdujemy niepełne kwadraty
  i wiadomo, że prowadzą do nowej krawędzi po przekątnej, której etykietą jest suma etykiet z krawędzi

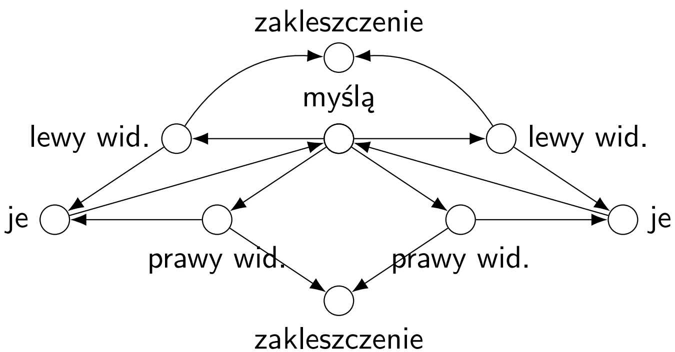
Przykład 2 filozofów, automat stanów

- gdyby używać teorii automatów, powinniśmy rozważyć iloczyn kartezjański czterech automatów: dwóch filozofów i dwóch widelców – 64 stany, a następnie ograniczyć się do stanów osiągalnych ze stanu początkowego



Przykład c.d., graf konfiguracji (sekwencyjny)

- stan początkowy to obaj filozofowie myślą, oba widelce są wolne
- w kolejnych stanach każdy z filozofów może wziąć widelec, a nawet dwa naraz
- jeśli jeden z nich weźmie oba, przechodzi do stanu jedzenia i potem wraca do początkowego stanu
- ale jeśli każdy z nich weźmie jeden widelec, następuje zakleszczenie i dalej nic się nie dzieje



Izomorfizm

- dane dwa grafy skierowane, etykietowane, ukorzenione, (V_i, E_i, A_i, v_i), $i = 1, 2$ gdzie V - wierzchołki, E - krawędzie, A - etykiety krawędzi, v - wierzchołek początkowy,
  zapis $v[a\rangle v'$ oznacza, że jest krawędź od v do v' z etykietą a

  def. izomorfizmem jest para bijekcji $\varphi : V_1 \to V_2$ oraz $\psi : A_1 \to A_2$ taka, że
  – $\varphi(v_1) = v_2$
  – $u[a\rangle u'$ w pierwszym grafie wtedy i tylko wtedy gdy $\varphi(u)[\psi(a)\rangle\varphi(u')$ w drugim grafie
- def: Systemy elementarne $\mathcal{N}_1$ i $\mathcal{N}_2$ są *podobne* jeśli ich grafy konfiguracji są izomorficzne
- tw.: nieważne czy rozpatrujemy grafy sekwencyjne czy całe grafy konfiguracji

Sensowne założenia o sieciach elementarnych

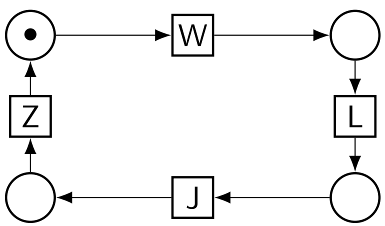
- sieci proste: zdarzenia obserwujemy wyłącznie przez ich efekt $C[e\rangle C'$ oznacza, że $C \setminus C' = {}^\bullet e$, $C' \setminus C = e^\bullet$
  dwa "różne" zdarzenia e i e' o tych samych własnościach nie dałyby się rozróżnić
  sieć jest prosta, jeśli różne zdarzenia różnią się pre- i/lub post-warunkami
- sieci zredukowane: zdarzenie e jest pożyteczne, jeśli $C[e\rangle$ dla pewnej konfiguracji $C \in \mathcal{C}$, tzn. jeśli występuje jako etykieta grafu sekwencyjnego
  w sieci zredukowanej nie ma zdarzeń, które nie mają szans się ujawnić
- Tw.: dla każdej sieci $\mathcal{N}$ istnieje zredukowana $\mathcal{N}'$ podobna do niej
  dw.: usuwamy zdarzenia niepożyteczne, może trzeba będzie usunąć warunki, które zostaną izolowane

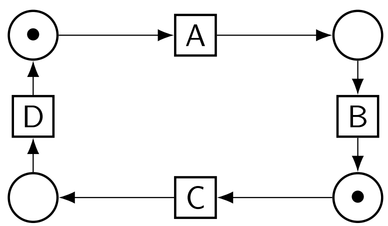
Żywość

- $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$, zdarzenie $e \in E$ jest *żywe* jeśli
  $\forall\, C \in \mathcal{C}.\, \exists\, \tau \in E^*.\, \exists\, C' \in \mathcal{C}.\, C[\tau\rangle C'$ oraz $C'[e\rangle$
  czyli $\forall\, C \in \mathcal{C}.\, \exists\, \tau \in E^*.\, C[\tau e\rangle$
  tzn. w każdej konfiguracji jest możliwość, że w przyszłości zdarzenie e zajdzie
- większość naszych przykładów nie miała zdarzeń żywych, jedynie cztery pory roku prezentowało cykl z powtarzającymi się zdarzeniami
- sieci używane w zastosowaniach mają głównie zdarzenia żywe, wymaga to cykli w sieci

Sieci bezkontaktowe

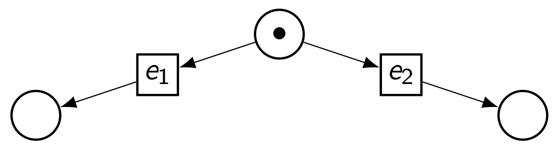
- dana sieć $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$, konfiguracja $C \subseteq B$,
  warunek zajścia zdarzenia $e \in E$ to koniunkcja dwóch warunków
  ${}^\bullet e \subseteq C$ oraz $e^\bullet \cap C = \emptyset$
- def. sieć jest *bezkontaktowa* jeśli drugi warunek jest automatycznie spełniony
  $\forall\, C \in \mathcal{C}.\, \forall\, e \in E.\, {}^\bullet e \subseteq C$ implikuje $e^\bullet \cap C = \emptyset$
- definicja odnosi się do konfiguracji osiągalnych $\mathcal{C}$ czyli tych, które naprawdę występują w konkretnej sieci
  np. $C = {}^\bullet e \cup e^\bullet$ spełnia pierwszy warunek ale nie drugi
  takie konfiguracje jednak wcale nie muszą występować w sieci elementarnej



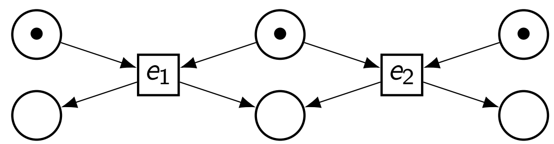


Warunki dualne

- $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$, $b, b' \in B$ są dualne do siebie jeśli
  $\forall\, e \in E.\, b \in {}^\bullet e$ wtedy i tylko wtedy $b' \in e^\bullet$
- można założyć, że różne warunki muszą mieć różne otoczenia (sieć prosta), wówczas dla każdego warunku b istnieje najwyżej jeden warunek dualny b'



- konstrukcja: jeśli warunek b nie ma dualnego w sieci $\mathcal{N}$, dodajemy nowy warunek b' by był dualny



Sieci bezkontaktowe – konstrukcja

- Tw.: Dla każdej sieci $\mathcal{N}$ istnieje podobna bezkontaktowa

  dw: konstruujemy warunki dualne do istniejących, jeśli nie ma ich w sieci oryginalnej
  – niemożliwe jest, by $b, b' \in B$ były dualne i $b, b' \in C_0$ lub $b, b' \notin C_0$, zdarzenia z nimi powiązane byłby niepożyteczne i nie powinny występować w sieci
  – dla nowych warunków dualnych decydujemy, że $b' \in C_0$ jeśli $b \notin C_0$ i na odwrót
  dla wszystkich konfiguracji osiągalnych będzie zachodzić własność $b \in C$ wtedy i tylko wtedy gdy $b' \notin C$
  w szczególności, jeśli ${}^\bullet e \subseteq C$ to $e^\bullet \cap C = \emptyset$ – gdyby jakiś post-warunek nie był pusty, to pusty byłby dualny pre-warunek

Przykład przekształcenia do sieci bezkontaktowej