Sieci Petriego

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

sem. letni 2023/2024

inf.ug.edu.pl/~amb/

Omówienie

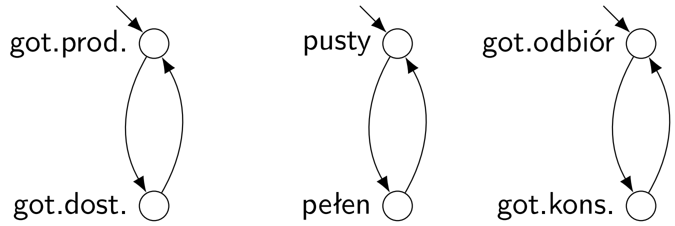
- Literatura
  – P. Starke, *Sieci Petri*, PWN, 1987.
  – G. Balbo, J. Desel, K. Jensen, W. Reisig, G. Rozenberg, M. Silva, *Introductory Tutorial, Petri Nets*, 21^{st} International Conference on Application and Theory of Petri Nets, Aarhus, Denmark, June 26-30, 2000.
- Narzędzia: system PIPE2 (*PETRI NET ANALYSER*)
- Wykład: egzamin teoretyczny

Dlaczego sieci Petriego?

Podstawy

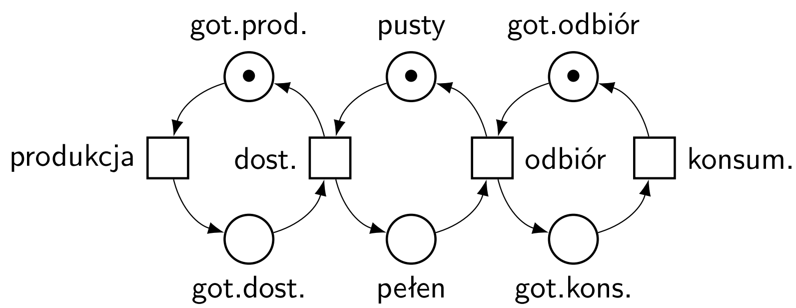
- Systemy sekwencyjne
  – kolejność wykonywania operacji jest dobrze określona
  – teoria automatów: stany i przejścia pomiędzy stanami
  – zakładamy, że stany są obserwowalne
- Problem skalowalności
  – chęć podziału automatu i opisu niezależnych części
  – funkcja przejścia nie opisuje „przyczyny” zmiany
- Współbieżność
  – chcemy opisywać niezależne systemy współdziałające ze sobą
  – przykład generyczny: producent i konsument
  – producent odkłada produkty do bufora, konsument pobiera je z bufora
  – warunki spójności: by pobrać produkt z bufora, musi on istnieć
  – ograniczeniem może też być pojemność bufora

Producent i konsument



- Trzy niezależne procesy
  – stany (kółka)
  – przejścia pomiędzy stanami (strzałki)
  – stany początkowe
- każdy w pętli zmieniającej dwa stany
  – producent: gotowy do produkcji, gotowy do dostawy
  – bufor: pusty, pełen
  – konsument: gotowy do odbioru, gotowy do konsumpcji
- Producent dostarcza do bufora, konsument pobiera z bufora

Producent i konsument 2



- Każde zdarzenie wymaga warunków by mogło zajść
- Warunki zmieniają się pod wpływem zdarzenia
- Stan całości jest określony wszystkimi warunkami (konfiguracja)
- Zdarzenia są określone lokalnie

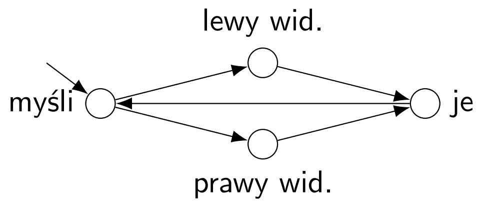
Dalsze wariacje

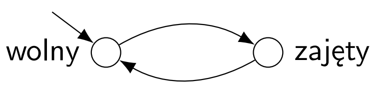
- Może być więcej konsumentów konkurujących o ten sam towar
- Być może pobierają go z pewnym prawdopodobieństwem
- Bufor może pomieścić więcej sztuk towarów
- Być może nie ma warunków binarnych, są zasoby, które zużywa się w różnym zakresie
- Być może zdarzenie zajmuje pewien czas

- Sieci elementarne
- Sieci miejsc i tranzycji
- Sieci z czasem, sieci stochastyczne

Jeszcze jeden przykład: filozofowie

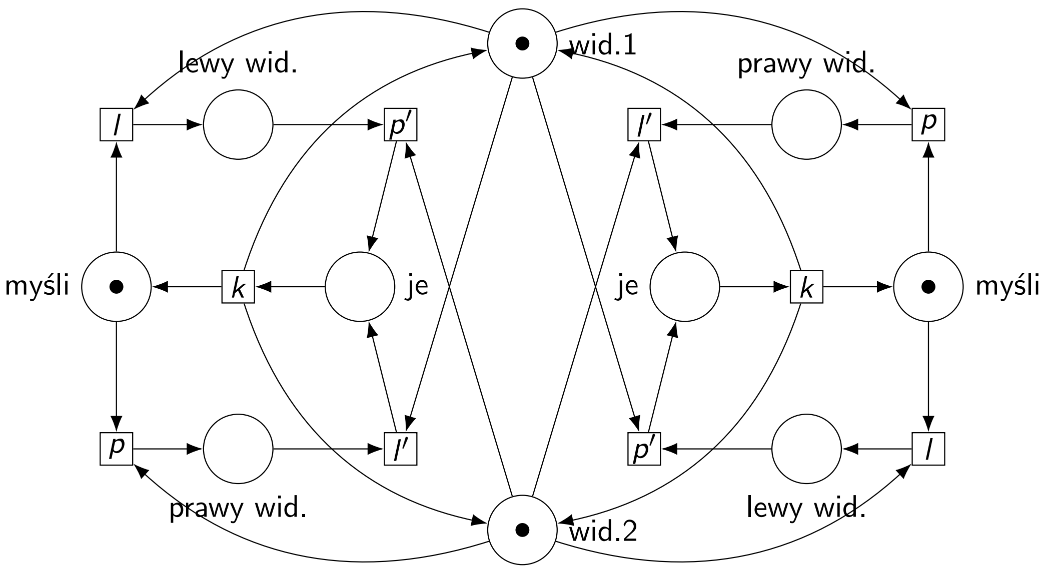
- pojedynczy filozof ma działa w/g automatu: myśli–bierze jeden widelec–bierze drugi widelec–je–odkłada oba widelce i znowu myśli
- każdy z widelców jest wolny lub zajęty





- przy większej liczbie filozofów i widelców, np. 5, a widelce są wspólne, trzeba etykietować przejścia
- np. filozof 1 myśli, bierze widelec 1 (jego lewy)
- ten sam widelec będzie prawym dla filozofa 2
- 10 osobnych automatów nie ujawnia szczegółów działania, iloczyn automatów jest mało czytelny

Filozofowie, sieć Petriego



Sieci elementarne

Sieci elementarne

- Zdarzenia i warunki
- Warunki mają wartości binarne, zachodzą lub nie
- Zdarzenia wymagają spełnienia warunków by mogły zajść, po ich zajściu warunki się zmieniają
- System może być b. złożony i mieć wiele warunków, zdarzenie ma swoje otoczenie niezależne od reszty
- Reprezentacja graficzna:
  – warunki: okręgi, jeśli zachodzą, to zaznaczenie w środku
  – zdarzenia: kwadraty lub b. grube kreski (pełne prostokąty)
  – strzałki wyjaśniające, które warunki przestają zachodzić, a które zaczynają po zajściu zdarzenia
  – zdarzenie może zajść jeśli spełnione są warunki początkowe, ale *nie są* spełnione warunki końcowe

Sieci elementarne, definicja

- B – warunki, lokalne stany
- E – zdarzenia (tranzycje w automatach)
- stan = zbiór warunków, *konfiguracja*
- $N = (B, E, F)$
  – $B \cap E = \emptyset$, $B \cup E \neq \emptyset$
  – $F \subseteq (B \times E) \cup (E \times B)$ – relacja przepływu
  – czyli graf dwudzielny, wierzchołki są albo z B albo z E, krawędzie łącza wyłącznie wierzchołki z różnych klas
  – dodatkowo żąda się, by nie było izolowanych wierzchołków
- dla $x \in B \cup E$, ${}^\bullet x = \{y \mid (y, x) \in F\}$, $x^\bullet = \{y \mid (x, y) \in F\}$
- sieć jest *czysta* jeśli zawsze ${}^\bullet x \cap x^\bullet = \emptyset$
  – czyli nie ma krótkich pętli
- sieć jest *prosta* jeśli $({}^\bullet x, x^\bullet) = ({}^\bullet y, y^\bullet)$ implikuje, że $x = y$

Zajścia zdarzeń

- $N = (B, E, F)$, $C \subseteq B$ – konfiguracja, $e \in E$
  – e jest umożliwione jeśli ${}^\bullet e \subseteq C$ oraz $e^\bullet \cap C = \emptyset$
  – oznaczenie $C[e\rangle$
  – gdyby ${}^\bullet e \cap e^\bullet \neq \emptyset$, to zdarzenie e nie byłoby umożliwione, sensownie jest zakładać, że sieć jest czysta
- uwaga: będą inne definicje sieci i relacji umożliwienia, dla których krótkie pętle mają głęboki sens
- jeśli $C[e\rangle$ to zdarzenie e może zajść
  – jeśli zaszło to nastąpiła zmiana konfiguracji
  – $C[e\rangle C'$ gdzie $C' = (C \setminus {}^\bullet e) \cup e^\bullet$
- C' jest wyznaczone jednoznacznie
- zmiana wywołana zdarzeniem e nie zależy od całej konfiguracji C
  – $C \setminus C' = {}^\bullet e$
  – $C' \setminus C = e^\bullet$

Współbieżność

- $N = (B, E, F)$, $\mathcal{U} \subseteq E$ jest *niezależny* jeśli
  $\forall\, e, e' \in \mathcal{U}.\, ({}^\bullet e \cup e^\bullet) \cap ({}^\bullet e' \cup e'^\bullet) = \emptyset$
- $C \subseteq B$ – konfiguracja, $\mathcal{U}$ jest umożliwiony, $C[\mathcal{U}\rangle$, jeśli każde zdarzenie z $\mathcal{U}$ jest umożliwione i są one niezależne
  – możliwość zajścia każdego ze zdarzeń nie zależy od tego, czy zaszły inne zdarzenia
  – tak samo dla wyniku zajścia każdego zdarzenia
- $C[\mathcal{U}\rangle C'$, gdzie $C' = (C \setminus {}^\bullet\mathcal{U}) \cup \mathcal{U}^\bullet$ $\quad {}^\bullet\mathcal{U} = \bigcup_{e \in \mathcal{U}} {}^\bullet e$, $\mathcal{U}^\bullet = \bigcup_{e \in \mathcal{U}} e^\bullet$
  – z definicji wynika w szczególności, że $C[\mathcal{U}\rangle$ implikuje ${}^\bullet\mathcal{U} \subseteq C$ oraz $\mathcal{U}^\bullet \cap C = \emptyset$
- będziemy uważać, że zdarzenia z $\mathcal{U}$ zachodzą współbieżnie
  – w szczególności ew. kolejność jest przypadkowa

Współbieżność – przemienność

- Załóżmy $N = (B, E, F)$, $C, C' \subseteq B$, $\mathcal{U} \subseteq E$, $C[\mathcal{U}\rangle C'$
  – niech $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$
  – wówczas zdarzenia z $\mathcal{U}$ mogą zajść w dowolnej kolejności, czyli
  $\exists\, C_1, C_2 \subseteq B.\, C[\mathcal{U}_1\rangle C_1[\mathcal{U}_2\rangle C'$ oraz $C[\mathcal{U}_2\rangle C_2[\mathcal{U}_1\rangle C'$
- graficznie

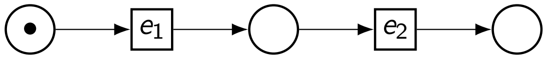
$$\begin{tikzcd} C \arrow[dd, "\mathcal{U}"'] \\ \\ C' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\mathcal{U}_1"'] \arrow[dd, "\mathcal{U}"] \arrow[dr, "\mathcal{U}_2"] & \\ C_1 \arrow[dr, "\mathcal{U}_2"'] & & C_2 \arrow[dl, "\mathcal{U}_1"] \\ & C' & \end{tikzcd}$$

Współbieżność – przemienność c.d.

- $N = (B, E, F)$, $C \subseteq B$, $\tau = e_1 e_2 \ldots e_n$ – ciąg zdarzeń z E
  – definiujemy $C[\tau\rangle$ oraz $C[\tau\rangle C'$ jako
  $\exists\, C_1, \ldots, C_n.\, C[e_1\rangle C_1[e_2\rangle \ldots C_n[e_n\rangle C'$
- Jeśli taki ciąg zdarzeń jest możliwy, to wszystkie dalsze konfiguracje są jednoznacznie określone
- Tw.: Niech $N = (B, E, F)$, $C, C' \subseteq B$, $\mathcal{U} \subseteq E$, $\mathcal{U} \neq \emptyset$
  wówczas $C[\mathcal{U}\rangle$ wtedy i tylko wtedy dla każdego uporządkowania $\mathcal{U} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ zachodzi $C[e_1 e_2 \ldots e_n\rangle$
  $C[\mathcal{U}\rangle C'$ wtedy i tylko wtedy $C[e_1 e_2 \ldots e_n\rangle C'$

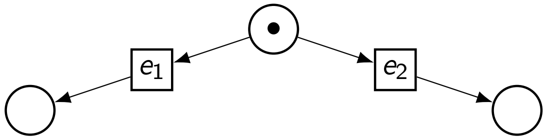
Współbieżność – brak

- Przykład



– ciąg zdarzeń $e_1 e_2$ jest w zaznaczonej konfiguracji możliwy
– ale zdarzenia e_1 i e_2 nie tworzą zbioru niezależnego
– zdarzenie e_2 nie może być wykonane
– zbiór $\{e_1, e_2\}$ nie może być jednocześnie wykonany

- Przykład



– każde ze zdarzeń może być wykonane
– ale tylko jedno z nich
– zdarzenia e_1 i e_2 nie tworzą zbioru niezależnego
– zbiór $\{e_1, e_2\}$ nie może być jednocześnie wykonany

Współbieżność – możliwość

- Tw.: $N = (B, E, F)$, $C \subseteq B$, $e_1, e_2 \in E$
jeśli $C[e_1 e_2\rangle$ oraz $C[e_2\rangle$, to $C[\{e_1, e_2\}\rangle$
– w szczególności, jeśli $C[e_1 e_2\rangle C'$, to $C[\{e_1, e_2\}\rangle C'$

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "e_1"'] \arrow[dr, "e_2"] & \\
C_1 \arrow[dr, "e_2"'] & & C_2 \\
 & C' &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[dd, "\{e_1, e_2\}"'] \\
\\
C'
\end{tikzcd}$$

- uwaga: nie sprawdzamy wcześniej, że $\{e_1, e_2\}$ jest niezależny, to wychodzi samo
– ${}^\bullet e_2 \subseteq C$ ale również ${}^\bullet e_2 \subseteq (C \setminus {}^\bullet e_1) \cup e_1^\bullet$ więc ${}^\bullet e_2 \cap e_1^\bullet = \emptyset$
– podobnie inne przekroje pre- i post-warunków

Konfiguracje osiągalne

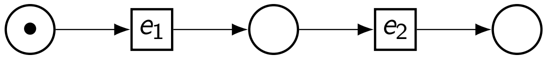
- $N = (B, E, F)$, $C \subseteq B$, domknięcie (wprzód) to zbiór konfiguracji t.ż
– $C \in [C\rangle$
– jeśli $C_1 \in [C\rangle$, $C_1[\mathcal{U}\rangle C_2$ dla pewnego $\mathcal{U}$, to również $C_2 \in [C\rangle$
- tzn. $[C\rangle$ jest zbiorem konfiguracji, które mogą się zdarzyć w różnych scenariuszach przebiegu zdarzeń zaczynając od konfiguracji C

System elementarny

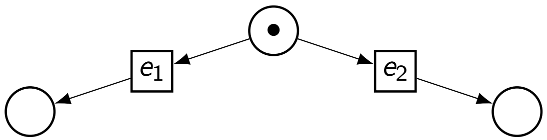
- $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ gdzie $N = (B, E, F)$ jest siecią elementarną a $C_0 \subseteq B$ jest ustaloną konfiguracją początkową
- N opisuje strukturę, zawsze taką samą
- C_0 wyznacza zachowanie, konfiguracja początkowa i późniejsze konfiguracje z niej powstałe
- $\mathcal{C} = [C_0\rangle$ – zbiór konfiguracji osiągalnych
$\{\mathcal{U} \subseteq E \mid \exists\, C \in [C_0\rangle.\ C[\mathcal{U}\rangle\}$ – zbiór kroków, które mogą być kiedykolwiek wykonane
– przez kroki rozumiemy również zbiory zdarzeń wykonywane współbieżnie

Podstawowe zależności między zdarzeniami

- $\mathcal{N}$ – system elementarny, $C \in \mathcal{C}$ – konfiguracja, $e_1, e_2 \in E$ – zdarzenia
- e_1 i e_2 tworzą ciąg zdarzeń w C jeśli
  $C[e_1\rangle$, nieprawda, że $C[e_2\rangle$ oraz $C[e_1\rangle C'[e_2\rangle$ dla pewnego C', czyli $C[e_1 e_2\rangle$



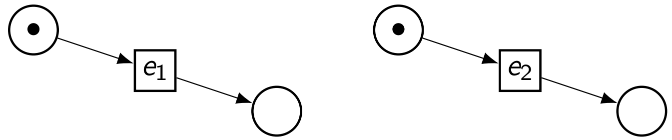
- e_1 i e_2 są w konflikcie w C jeśli
  $C[e_1\rangle$, $C[e_2\rangle$, ale nieprawda, że $C[\{e_1, e_2\}\rangle$



jedynym powodem konfliktu jest $({}^\bullet e_1 \cap {}^\bullet e_2) \cup (e_1^\bullet \cap e_2^\bullet) \neq \emptyset$

Podstawowe zależności między zdarzeniami c.d.

- e_1 i e_2 są współbieżne w C jeśli $C[\{e_1, e_2\}\rangle$



- warunkiem koniecznym współbieżności jest rozłączność otoczeń zdarzeń, czyli $({}^\bullet e_1 \cup e_1^\bullet) \cap ({}^\bullet e_2 \cup e_2^\bullet) = \emptyset$
- ale nie jest to warunek wystarczający