

Sieci Petriego

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

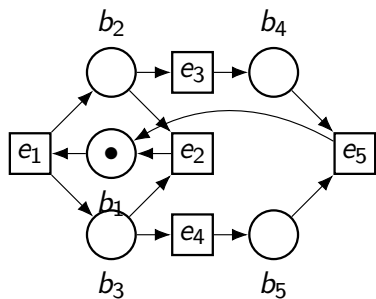
sem. letni 2025/2026

inf.ug.edu.pl/~amb/

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Sieci Petriego sem. letni 2025/2026 1 / 13

Sieci elementarne c.d.

Przykład sieci



- wszystkie zdarzenia w tej sieci są żywe i mogą wykonywać się cyklicznie bez końca
- na pewno zacznie się od zdarzenia e_1
- w zaznaczeniu $\{b_2, b_3\}$ są dwa konflikty
- być może wykona się e_2 wracając do punktu wyjścia

- a być może np. e_3 , wówczas następnym zdarzeniem może być tylko e_4 , a po nich e_5 wracając do punktu wyjścia
- zdarzenia e_3 i e_4 są niezależne i nie ma powodu przesądzać ich kolejności
- celem jest opis kolejnych wydarzeń, w którym wyjaśnione są decyzje konfliktowe, w którym zachowana jest niezbędna kolejność zdarzeń, ale nie jest przesądzona kolejność zdarzeń niezależnych

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Sieci Petriego sem. letni 2025/2026 3 / 13

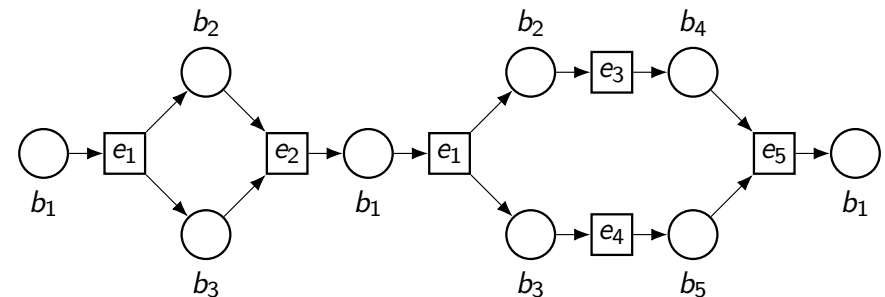
Sieci elementarne – procesy

opracowanie na podstawie W.Reisig, *Sieci Petriego*, WNT 1988

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Sieci Petriego sem. letni 2025/2026 2 / 13

Sieci elementarne c.d.

Sieć wystąpień – idea procesu



- w tej sieci nie ma powrotu do poprzednich warunków/miejsc, jest wyraźny kierunek „upływający czas”
- nie ma konfliktów, każdy warunek jest wykorzystany przez jedno zdarzenie
- i warunki i zdarzenia mają powtarzające się etykiety oznaczające, że dany warunek lub zdarzenie oryginalnej sieci zachodzi po raz kolejny

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Sieci Petriego sem. letni 2025/2026 4 / 13

Trochę matematyki

- *podobieństwo* – dowolna relacja zwrotna i symetryczna (niekoniecznie przechodnia) $\rho \subseteq A \times A$
- *rejon* relacji podobieństwa – maksymalna klika, tzn. $\forall x, y \in B. x \rho y$ oraz $\forall x \in A \setminus B. \exists y \in B. x \not\rho y$
- rejonu są niepuste i pokrywają A ale nie muszą być rozłączne
- dany porządek (antysymetryczny) $<$ na A , definiujemy dwie relacje
 - x li y w.t.w. $x < y$ lub $x > y$ lub $x = y$
 - x co y w.t.w. $x \not< y$ i $x \not> y$
- Tw.: są to relacje podobieństwa
- *linia* – rejon relacji li, *cięcie* – rejon relacji co
- Tw.: przekrój linii i cięcia jest najwyżej jednoelementowy
- Zbiór uporządkowany jest *ograniczony* w.t.w. $\exists n \in \mathbb{N}$ każda linia ma moc $\leq n$
- Zbiór uporządkowany jest *gęsty* w.t.w. każda linia ma przekrój z każdym cięciem

Sieci wystąpień

- Sieć $\mathcal{N} = (B, E, F)$ jest *siecią wystąpień* w.t.w.
 - sieć jest acykliczna tzn. $\forall x \in B \cup E. \neg(x, x) \in F^+$
 - $\forall b \in B. |\bullet b|, |b\bullet| \leq 1$ – nie ma rozgałęzień na elementach B
- F^+ jest relacją porządku na $B \cup E$
- *płat* – cięcie zawarte w B , tylko warunki
- linia w sieci wystąpień to składnik sekwencyjny sieci
płat w sieci wystąpień to „migawka”, konfiguracja warunków zachodzących w pewnym momencie
- Tw.: ograniczona sieć wystąpień jest gęsta
dw.: rozgałęzienia mogą zajść wyłącznie na zdarzeniach, pomiędzy nimi musi być warunek
- dla sieci wystąpień $\mathcal{N} = (B, E, F)$ zachodzi ${}^\circ(B \cup E) \subseteq B$, przyjmując to za konfigurację początkową otrzymujemy system elementarny bezkonfliktowy
- Tw.: $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ w.t.w. C jest płatem

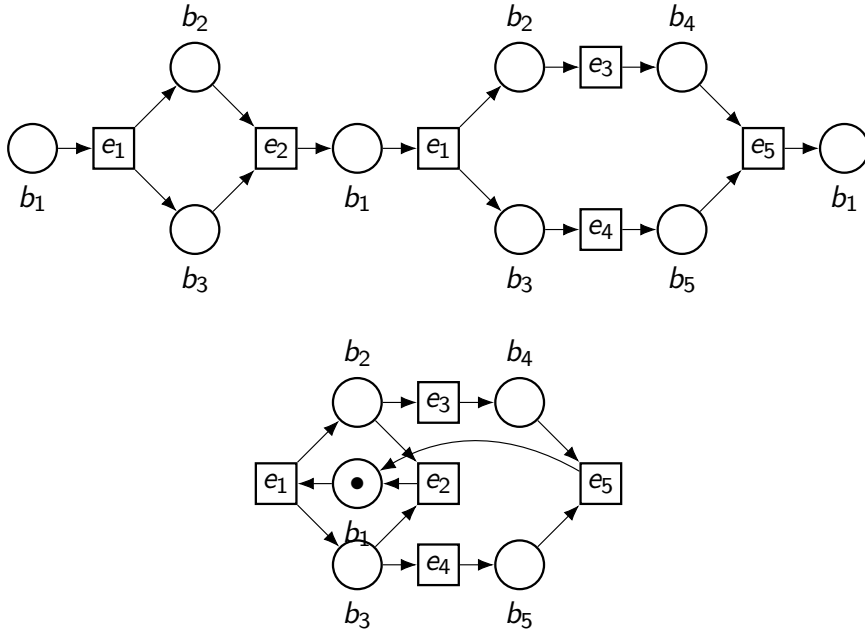
Trochę matematyki, c.d.

- A zbiór uporządkowany, $B, C \subseteq A$
 - $B \leq C$ w.t.w. $\forall b \in B, c \in C. b < c$ lub b co c (czyli $b \not< c$)
 - $B^- = \{a \in A \mid \{a\} \leq B\}$ – a , które mogą być wcześniej niż $b \in B$
 - $B^+ = \{a \in A \mid B \leq \{a\}\}$ – a , które mogą być później niż $b \in B$
 - ${}^\circ B = \{b \in B \mid \forall b' \in B. b$ co b' lub $b < b'\}$ – elementy minimalne
 - $B^\circ = \{b \in B \mid \forall b' \in B. b$ co b' lub $b' < b\}$ – elementy maksymalne
- Tw.: jeśli A jest ograniczony, to ${}^\circ B$ oraz B° są cięciami
dw.: oczywiście są to kliki relacji co, jeśli np. $a \in A \setminus {}^\circ B$, to a należy do jakiejś linii L , musi istnieć element najmniejszy $b \in L \cap {}^\circ B$ i $b < a$

Procesy

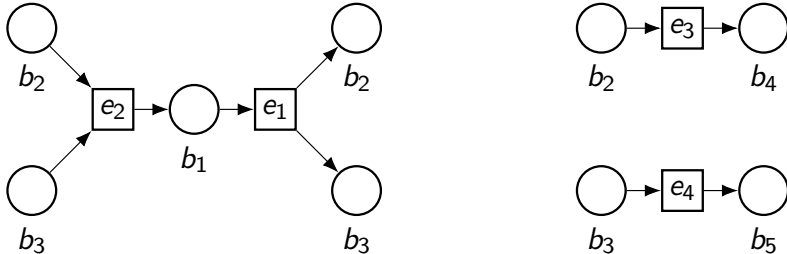
- dany system elementarny bezkontaktowy $\mathcal{N} = (B, E, F, C_0)$ gdzie $N = (B, E, F)$ jest siecią elementarną a $C_0 \subseteq B$ jest konfiguracją początkową
- *procesem* sieci $\mathcal{N}$ jest odwzorowanie $p : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}$, $\mathcal{N}' = (B', E', F')$ jest siecią wystąpień, takie, że
 - $\forall D \subseteq B'. \text{jeśli } D \text{ jest płatem, to } p(D) \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}} \text{ oraz } p|D \text{ jest różnowartościowe}$
 - $\forall e' \in E'. p(\bullet e') = \bullet p(e'), p(e'\bullet) = p(e')\bullet$
- Tw.: jeśli p jest procesem, to
 - $p(B') \subseteq B$, $p(E') \subseteq E$ (zachowanie „typów”)
 - $(x', y') \in F' \Rightarrow (p(x'), p(y')) \in F$ (zachowanie F)
 - $p(x') = p(y') \Rightarrow x' \text{ li } y'$ (sklejają się jedynie elementy pokazujące, że upłynął czas)
 - p jest różnowartościowe dla wszystkich cięć, nie tylko płatów
- Tw.: jeśli $E'' \subseteq E'$ jest takie, że $\forall e_1, e_2 \in E''. e_1$ co e_2 , to $\exists C_1, C_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}. C_1[p(E'')] \rangle C_2$

Przykład procesu



Procesy elementarne

- proces $p : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}$ jest *elementarny* jeśli ${}^\circ B' \cup B'^\circ = B'$

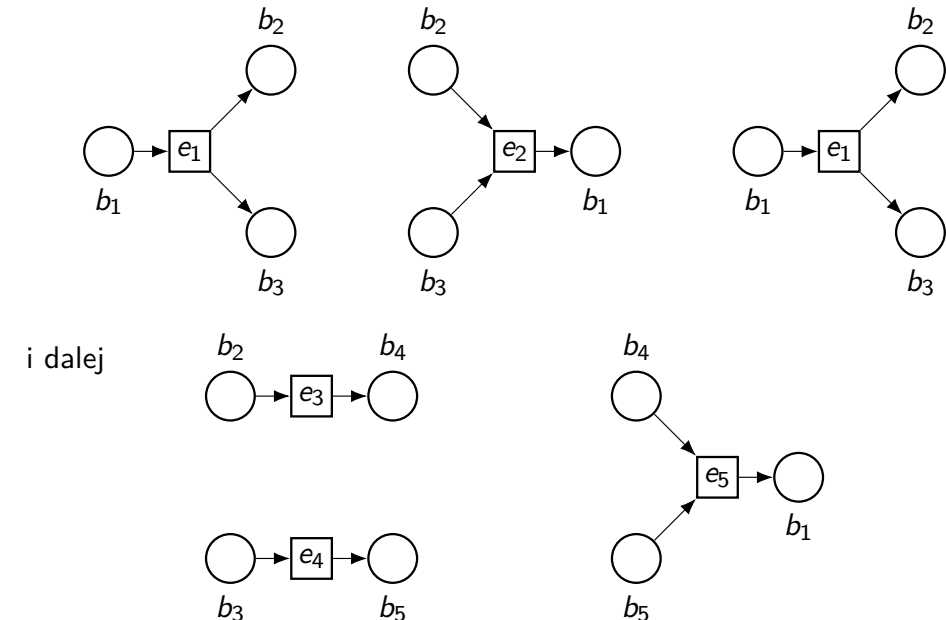


- lewy proces nie jest elementarny, środkowy warunek nie należy do „brzegu”, prawy proces jest elementarny (rozumiemy $\mathcal{N}$ jako sieć z początku wykładu)
- Tw.: proces p jest elementarny w.t.w. $p({}^\circ B')[p(E')]\langle p(B'^\circ) \rangle$ jest krokiem w $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$
- Tw.: dla każdego procesu p istnieje rozkład na procesy elementarne $p = p_1; \dots; p_m$

Składanie procesów

- dane dwa procesy $p_i : \mathcal{N}_i \rightarrow \mathcal{N}$
- ${}^\circ B_i$ i B_i° są płacami w $\mathcal{N}_i$
- Tw.: jeśli $p_1(B_1^\circ) = p_2({}^\circ B_2)$, to istnieje sieć wystąpień $\mathcal{N}'$, płac tej sieci D i proces $p : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}$ takie, że $p|D^- = p_1$, $p|D^+ = p_2$
dw.: „sklejamy” sieci $\mathcal{N}_1$ i $\mathcal{N}_2$ wzdłuż płatów B_1° i ${}^\circ B_2$, będzie to płac D , $D^- = B_1 \cup E_1$, $D^+ = B_2 \cup E_2$
- złożeniem procesów p_1 i p_2 jest powyższy proces p
- jeśli określone są złożenia $p_1; p_2$ oraz $p_2; p_3$, to również $(p_1; p_2); p_3$ i $p_1; (p_2; p_3)$ i są one izomorficzne

Przykład rozkładu procesu



Procesy a grafy konfiguracji

- proces elementarny $p : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}$ odpowiada krokowi w grafie konfiguracji $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$
- i na odwrót, krok $C[A]D$ w $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ definiuje sieć wystąpień $(C \cup D, A, F \cap (C \cup D \cup A)^2)$ i proces id
- ścieżka w $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ składa się z kroków, składając procesy otrzymujemy proces dla ścieżki
- ale wiele ścieżek może generować ten sam proces
- Tw.: dany system elementarny $\mathcal{N}$, $G_1, G_2 \subseteq E$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, założmy $C[G_1]C'$ oraz $C'[G_2]C''$ w $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$, odpowiadają temu procesy p_1, p_2 , badamy ich złożenie $p_1; p_2 : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}$ wówczas $\forall e_1, e_2 \in E'. e_1$ co e_2 w.t.w. $C[G_1 \cup G_2]C''$
- Tw.: ścieżki generują ten sam proces w.t.w. istnieje ciąg permutacji prowadzący od jednej ścieżki do drugiej