Matematyka dyskretna

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

sem. zimowy 2025/26

inf.ug.edu.pl/~amb/MaD

Drzewa binarne i uporządkowane

Drzewa binarne

- drzewo ma jeden korzeń
  każdy węzeł ma lewego i prawego syna
  każdy z tych potomków może nie istnieć
- każdy węzeł drzewa można reprezentować słowem z $\{0,1\}^*$
  - ε jest korzeniem
  - potomkami w są $w0$ oraz $w1$
  - długość słowa = odległość od korzenia
  - wysokość drzewa = największa odległość od korzenia
    (czyli samotny korzeń ma wysokość zero)
- każde słowo $w \in \{0,1\}^*$ określa węzeł w nieskończonym drzewie binarnym
  - słów długości n jest 2^n
  - słów długości $\leqslant n$ jest $\Sigma_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$
  - są to liście i węzły w drzewie binarnym pełnym wysokości n

Drzewa binarnych przeszukiwań

- dany zbiór uporządkowany (np. słowa jakiegoś utworu literackiego)
- umieszczamy je w węzłach drzewa binarnego tak by
  - słowo o kodzie $w0$ było wcześniejsze niż słowo o kodzie w
  - a $w1$ – późniejsze
  - jeśli dopuszczamy powtarzanie się słów w utworze, a każde wystąpienie chcemy umieścić, to jedna z nierówności powinna być nieostra
- w drzewie wysokości n można umieścić $2^{n+1} - 1$ elementów
  jeśli drzewo ma wszystkie węzły

Zgadywanie

- „zgadnij liczbę, którą właśnie pomyślałem”
  wiadomo, że dodatnia, mniejsza od 1000
  możliwe odpowiedzi: „mniejsza”, „większa”, „zgadłeś”
- „czy jest to 500?”
- jeśli mniejsza, to „może 250?”
  a jeśli większa, to „może 750?”
- w każdym kroku przedział, gdzie znajduje się liczba zmniejsza się dwukrotnie
- najdalej w 10 kroku liczba zostanie znaleziona

Algorytmy dla drzew binarnych przeszukiwań

- wstawianie (etykiety e do drzewa T)
  - jeśli T jest puste, to wstaw do korzenia: $T(\varepsilon) = e$
  - jeśli $e < T(\varepsilon)$, to wstaw do lewego syna,
    t.zn. wykonaj algorytm z lewym synem zamiast T
  - jeśli $e > T(\varepsilon)$, to wstaw do prawego syna
- trzeba wyjaśnić sprawę ew. powtórzeń etykiety, czy są możliwe? czy ignorujemy? czy notujemy krotność wystąpienia?
- wyszukiwanie etykiety e w drzewie T
  - jeśli T jest puste, to e nie ma w T
  - jeśli $e = T(\varepsilon)$ to e znalezione w korzeniu
  - jeśli $e < T(\varepsilon)$ to szukaj e u lewego syna
  - w p.p. szukaj e u prawego syna

Przykład

- „Wertowaliśmy odurzeni światłem w tej wielkiej księdze wakacji, której wszystkie karty pałały od blasku i miały na dnie słodki do omdlenia miąższ złotych gruszek.”

  The Project Gutenberg EBook of *Sklepy cynamonowe*, by Bruno Schulz
  Title: Sklepy cynamonowe
  Author: Bruno Schulz
  Release Date: May, 2005 [EBook #8119]

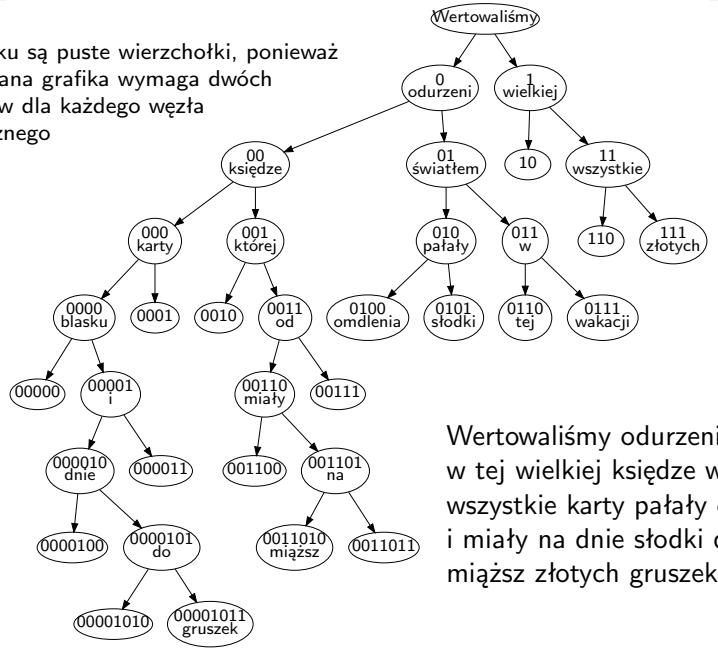
Przykład

Wertowaliśmy (ε)	odurzeni (0)	światłem (01)
w (011)	tej (0110)	wielkiej (1)
księdze (00)	wakacji (0111)	której (001)
wszystkie (11)	karty (000)	pałały (010)
od (0111)	blasku (0000)	i (00001)
miały (00110)	na (001101)	dnie (000010)
słodki (0101)	do (0000101)	omdlenia (0100)
miąższ (0011010)	złotych (111)	gruszek (00001011)

- wysokość drzewa wynosi 8 (najdłuższe słowo: 00001011)
- drzewo pełne wysokości 8 ma 511 węzłów, a to tylko 24
- wystarczyłoby drzewo wysokości 4 ($24 < 32 = 2^5$), gdyby słowa były starannie ułożone

Przykład – drzewo binarnych przeszukiwań

na rysunku są puste wierzchołki, ponieważ zastosowana grafika wymaga dwóch potomków dla każdego węzła wewnętrznego

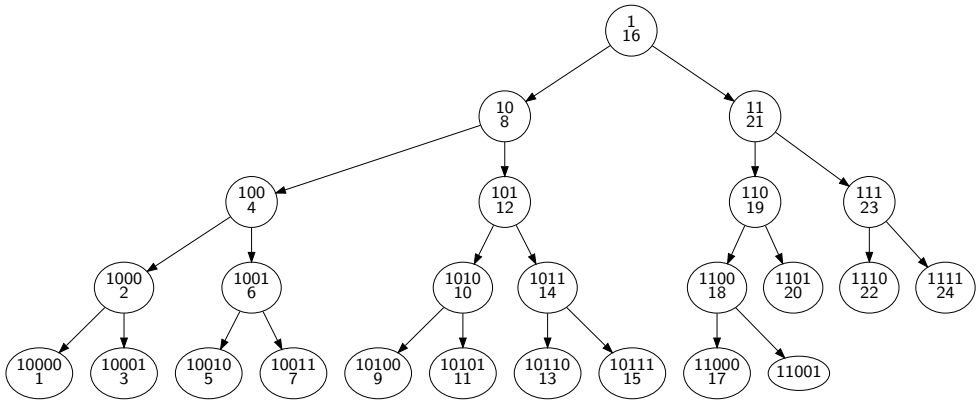


Wertowaliśmy odurzeni światłem
w tej wielkiej księdze wakacji, której
wszystkie karty pałały od blasku
i miały na dnie słodki do omdlenia
miąższ złotych gruszek

Dalsze algorytmy dla drzew binarnych przeszukiwań

- Wyszukiwanie najmniejszej etykiety w drzewie T:
  - jeśli T jest puste, to nie ma elementów
  - jeśli T nie ma lewego syna, najmniejszym elementem w T jest $T(\varepsilon)$
  - w p.p. szukaj u lewego syna
- Wypisywanie uporządkowanych etykiet drzewa T:
  - jeśli T jest puste, to nie ma co wypisywać
  - w p.p. wypisz uporządkowane etykiety lewego syna T
  - następnie etykietę $T(\varepsilon)$
  - i na końcu wypisz uporządkowane etykiety prawego syna T

Zrównoważone drzewo binarnych przeszukiwań



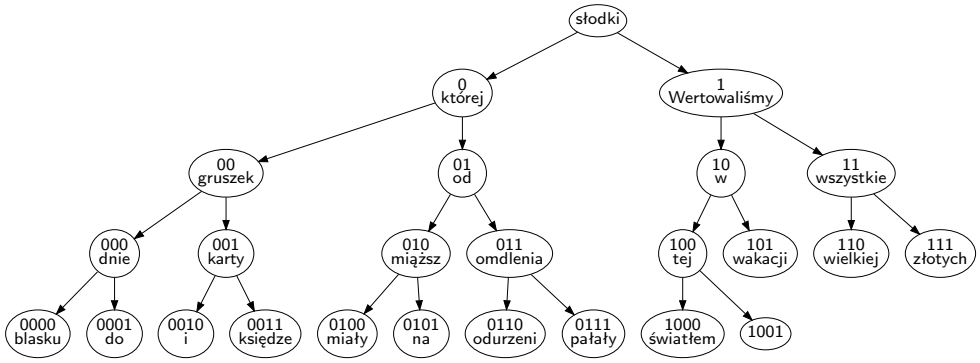
- jedynka z przodu kodowania węzła daje numerację od 1 do 24 (ostatni węzeł nie jest tutaj używany)
- teraz można wstawić dowolne 24 uporządkowane elementy, tak by tworzyły drzewo binarnych wyszukiwań z optymalną złożonością wyszukiwania

Przykład raz jeszcze

1 blasku
2 dnie
3 do
4 gruszek
5 i
6 karty
7 księdze
8 której
9 miały
10 miąższ
11 na
12 od
13 odurzeni
14 omdlenia
15 pałały
16 słodki
17 światłem
18 tej
19 w
20 wakacji
21 Wertowaliśmy
22 wielkiej
23 wszystkie
24 złotych

- kolejność alfabetyczna wyrazów w przykładzie pokazuje jak zbudować drzewo zbalansowane
- na początek wyraz 16, potem 8, 21 itd.

Przykład – drzewo binarnych przeszukiwań zrównoważone



- Wysokość tego drzewa wynosi 4, wszystkie liście są na dwóch sąsiednich poziomach
- złożoność wyszukiwania jest $O(\log_2 \ell)$, gdzie ℓ jest liczbą elementów dokładniej, wysokość jest $\leqslant \log_2 \ell$

Reprezentacja drzew binarnych w jęz. C

```
struct tnode {
  char *word;
  int count;
  struct tnode *left;
  struct tnode *right;
};
```

drzewo binarne, etykietą jest para: słowo i licznik wystąpień

```
void treeprint(struct tnode *p) {
  if (p != NULL) {
    treeprint(p->left);
    printf("%4d-%s\n",\\
        p->count, p->word);
    treeprint(p->right);
  }
}
```

wydruk zawartości drzewa binarnego, najpierw lewe podrzewo, potem korzeń i prawe podrzewo

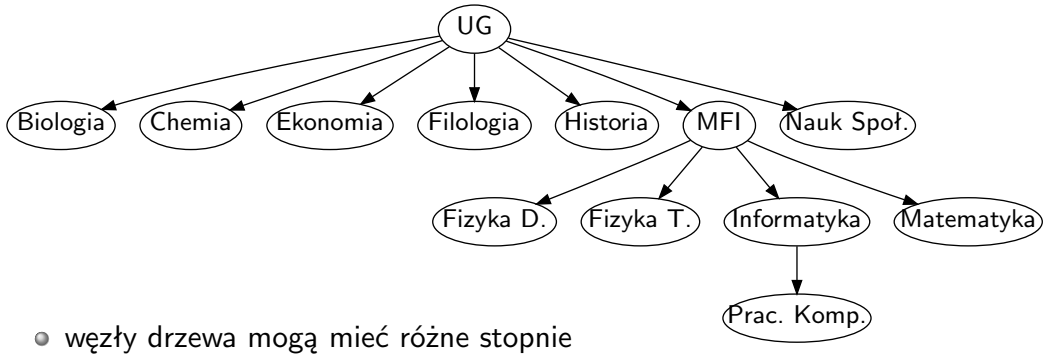
Reprezentacja drzew binarnych – wstawianie

```
struct tnode *addtree(struct tnode *p, char *w) {
  int cond;
  if (p == NULL) {
    p = malloc(sizeof(struct tnode));
    p->word = strdup(w);
    p->count = 1;
    p->left = p->right = NULL;
  } else if ((cond = strcmp(w, p->word)) == 0) {
    p->count++;
  } else if (cond < 0) {
    p->left = addtree(p->left, w);
  } else {
    p->right = addtree(p->right, w);
  }
  return p;
}
```


Reprezentacja drzew binarnych w tablicy

- drzewo binarne pełne ma węzły o numerach od 1 do $2^n - 1$
- mniejsza liczba węzłów może być umieszczona kolejno na najniższym poziomie
- odpowiada to tablicy o kolejnych numerach $1 \ldots N$
- korzeń ma numer 1, lewy potomek węzła i ma numer $2 \cdot i$, prawy $2 \cdot i + 1$
- poddrzewo pod węzłem i (potomkowie i) mają numery $2^\ell \cdot i, \ldots, 2^\ell \cdot i + 2^\ell - 1$ gdzie ℓ jest odległością od węzła

Drzewa niebinarne



- węzły drzewa mogą mieć różne stopnie
- ale potomkowie każdego węzła mają ustaloną kolejność
- reprezentacja w jęz. C wymaga raczej listy potomków – najstarszy syn i wskaźnik na kolejnego

Drzewa o stałym stopniu rozgałęzienia

- drzewa ternarne
  - każdy węzeł ma trzech potomków o ustalonych znaczeniach
  - np. „mało", „średnio", „dużo" albo inne sytuacje
  - liczba węzłów dla drzewa wysokości h wynosi $\Sigma_{i=0}^{h} 3^i = \frac{1}{2}3^{h+1}$
  - reprezentacja w jęz. C za pomocą struktury z polami odpowiadającymi trzem opcjom
  - reprezentacja w tablicy gdzie potomkiem węzła i są węzły $3 \cdot i$, $3 \cdot i + 1$ oraz $3 \cdot i + 2$

Drzewa o stałym stopniu rozgałęzienia, c.d.

- dany alfabet A mocy $\ell = |A|$, każde słowo $w \in A^*$ określa węzeł
  - ε jest korzeniem
  - bezpośrednimi potomkami w są wx dla $x \in A$
  - czyli potomkowie w są rozróżniani wg nazwy z A
  - wszyscy potomkowie węzła w są postaci wu dla $u \in A^+$
  - słów długości n jest ℓ^n
  - słów długości $\leqslant n$ jest $\Sigma_{i=0}^{n} \ell^i = \frac{\ell^{n+1}-1}{\ell-1}$

Ciąg geometryczny raz jeszcze

- $\Sigma_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$
- dowolna liczba $0 \leqslant \ell < 2^{n+1}$ jest sumą pewnych wyrazów tego ciągu i to na jeden tylko sposób
- dw.: są to cyfry przedstawienia ℓ w układzie dwójkowym
- dane są odważniki o wagach $3^i, i = 0, 1, \ldots, n$
  można je kłaść na dowolnej z dwóch szalek wagi
- $\Sigma_{i=0}^{n} 3^i = \frac{1}{2} \cdot (3^{n+1} - 1)$
  dowolny ciężar nie większy niż $\frac{1}{2} \cdot (3^{n+1} - 1)$ może być zważony za pomocą tych odważników
- dw.: przyjmujemy układ trójkowy z cyframi $-1, 0, 1$
  np. $(20)_{10} = (1, -1, 1, -1)_3$ czyli 20=27-9+3-1
- zamiana szalek miejscami mogłaby być interpretowana jako ważenie ciężarów ujemnych

Drzewa algorytmów

- dane są cztery monety, jedna być może fałszywa
- monety można ważyć na wadze z szalkami
- algorytm szukania fałszywej monety jest drzewym stopnia 3
  korzeniem jest start
  każde ważenie może dać jeden z trzech możliwych wyników
- drzewo o 9 liściach musi mieć wysokość co najmniej 2
  - jeśli wysokość 2, to przy każdym wyniku pierwszego ważenia muszą pozostać 3 możliwości
  - i muszą wyjaśnić się w drugim ważeniu
- nie ma algorytmu działającego w dwóch ważeniach
  - jeśli porównujemy M_1 i M_2 i np. $M_1 = M_2$, to pozostaje 5 możliwości
  - jeśli porównujemy $M_1 + M_2$ i $M_3 + M_4$ i np. $M_1 + M_2 < M_3 + M_4$, to pozostają 4 możliwości
- istnieje algorytm, jeśli mamy piątą, dobrą monetę