

Matematyka dyskretna

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

sem. zimowy 2025/26

inf.ug.edu.pl/~amb/MaD

Słowo „dyskretna”

- „freedom to act or judge on one's own”
- ...*at driver's discretion*, w/g uznania kierowcy
- szkolna matematyka → woda wlewa się do basenu, jak długo? wiemy ile litrów wody na minutę, jakie są rozmiary basenu, wynik obliczamy w godzinach, minutach i sekundach
- zjawiska w informatyce mają charakter skokowy
- ... po naciśnięciu przycisku następuje start
... wybierz skręt w prawo lub w lewo
... sprawdź warunek i zachowaj się w ten czy inny sposób
- nie możemy opisać tych zjawisk metodami znanymi w mechanice
nie ma tu zastosowania metoda analizy nieskończenie małych kroków

Organizacja

- literatura: A. Szepietowski, *Matematyka dyskretna*, UG, 2004 (jest nowsze wydanie)
- literatura uzupełniająca:
 - J. Topp, *Matematyka dyskretna*, Wyd. PWSZ w Elblągu
 - K. Ross, Ch. Wright, *Matematyka dyskretna*, PWN 2000
- materiały są/będą dostępne inf.ug.edu.pl/~amb
- ćwiczenia, 2 kolokwia, egzamin na zakończenie

Działy

- Teoria zbiorów – podstawy matematyki
opis bardzo ogólnikowy bardzo wielu zjawisk
 - funkcje, relacje, grafy, ...
- Arytmetyka – liczby naturalne,
nie wymierne, nie rzeczywiste, nie zespolone
 - służą do liczenia
 - oprócz innych zastosowań, niespodziewane zastosowanie w kryptografii
- Kombinatoryka – liczenie na sztuki
 - na ile sposobów można wypełnić kupon totolotka?
 - ile istnieje przestawień liter w danym tekście?
 - ile istnieje ciągów bitów danej długości?

Działy, c.d.

- Funkcje boolowskie – algebra logiki
 - wartości logiczne *prawda* i *fałsz* wraz z operacjami
 - $B = \{0, 1\}$, $\vee, \wedge: B \times B \rightarrow B$, $\neg: B \rightarrow B$, ...
 - również funkcje wielu zmiennnych, funkcje definiowane wzorem ale i podane w postaci tabeli
- Rekurencja
 - $n! = n * (n - 1)!$
 - definiujemy symbol ! ale w definicji też go używamy
 - ta definicja nie jest jeszcze kompletna, brakuje $0! = 1$
 - tę definicję łatwo zamienić na pętlę, ale nie zawsze tak jest

Liczby, zbiory, relacje

Działy, c.d.

- Teoria grafów i drzew
 - grafy nieskierowane (drogi zwykłe, połączenia w sieci)
 - grafy skierowane (drogi jednokierunkowe, przepływy)
 - drzewa (korzeń, rozgałęzienia, na końcu liście)
 - struktura drzewiasta
 - uniwersytet ma wydziały, te mają instytuty i dalej zakłady
 - katalog główny ma podkatalogi i pliki, w katalogach też są podkatalogi i pliki itd.

Liczby

- naturalne $\mathbb{N}$, całkowite $\mathbb{Z}$, rzeczywiste $\mathbb{R}$ (a raczej wymierne $\mathbb{Q}$ i nie wszystkie, ułamki binarne)
- operacje arytmetyczne: dodawanie, mnożenie, minus, odejmowanie, dzielenie, ale nie przez zero
- $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, ale $/: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ czy może $/: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$?
- dwa różne dzielenia w języku C, dzielenie całkowitoliczbowe i po prostu dzielenie
- własności: przemienność $a + b = b + a$, łączność: $(a + b) + c = a + (b + c)$, rozdzielność: $a * (b + c) = a * b + a * c$
konwencje notacyjne – nawiasy, siła wiązania operatorów

Większe operacje

$\sum_{i=1}^n a_i$ – suma $\prod_{i=1}^n a_i$ – iloczyn

- np. $\sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$
- bardziej skomplikowane zakresy indeksów
 $\sum_{j=0}^{\ell} \sum_{i=0}^k (i+j) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\ell} (i+j)$
 $\sum_{n=0}^{\ell} \sum_{i=0}^n q^i \neq \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{n=0}^{\ell} q^i$
w lewym wyrażeniu nieokreślone jest ℓ , w prawym również n
- własności operatorów sumy i iloczynu
 $\sum_{i=0}^n q^i = \sum_{j=0}^n q^j$
 $\sum_{i=0}^k (i+j) \neq \sum_{j=0}^k (j+j)$
podstawianie wymaga uwagi
- $\sum_{i=1}^0 a_i = 0$ $\prod_{i=1}^0 a_i = 1$

Zbiory

- $a \in A$ – element a należy do zbioru A
- $\mathbb{N}$ – liczby naturalne, $\mathbb{Z}$ – l. całkowite, $\mathbb{R}$ – l. rzeczywiste
 $B = \{0, 1\}$ – wartości boolowskie
- $\emptyset = 0$, $\{0\} = 1$, $\{0, 1\} = 2$, $\{0, 1, 2\} = 3$, $\dots = 4$
- $\{5, \{\mathbb{N}, \spadesuit\}, B\}$ – wyliczenie elementów zbioru
elementem może być cokolwiek, również inny zbiór
- $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ parzyste}\}$ – wybór podzbioru za pomocą pewnego warunku logicznego
- $A \cup B$ – suma zbiorów, elementy należące przynajmniej do jednego z nich
 $A \cap B$ – przekrój, $A \setminus B$ – różnica $\emptyset$ – zbiór pusty, nie zawiera żadnych elementów
- $A \subseteq B$ – relacja zawierania,
każdy element $x \in A$ musi spełniać $x \in B$,
ale niekoniecznie na odwrót

Indukcja matematyczna

- chcemy udowodnić twierdzenie $\forall n \in \mathbb{N}. \Phi(n)$ gdzie Φ jest pewną własnością liczb naturalnych
- dowód indukcyjny ma dwa kroki
 - udowadniamy $\Phi(0)$ – przypadek bazowy (czasem zaczynamy od $n = 1$ a bywa, że od $n = 2$)
 - udowadniamy implikację $\Phi(n) \Rightarrow \Phi(n+1)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$
- np. $\forall n. \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
 - dla $n = 0$ obie strony są zero
 - zakładamy prawdziwość wzoru dla n i obliczamy dla $n+1$
 $\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^n i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
co dowodzi prawdziwości implikacji i kończy cały dowód

Operacje na zbiorach

- przemienność: $A \cup B = B \cup A$ i podobnie dla przekroju
- łączność: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ j.w.
- rozdzielność: $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$
(konwencja nt. siły wiązania operatorów)
rozdzielność iloczynu względem sumy jest niepodobna do własności liczb
- operacje $\cup$ i $\cap$ są w pewnym sensie dualne, niemal odbiciem zwierciadlanym
- „zero” – $\emptyset \cup A = A$, $\emptyset \cap A = \emptyset$
„jedynek”? – $\Omega \cap A = A$, $\Omega \cup A = \Omega$, zbiór wszystkiego?
- $A \cup A = A \cap A = A$
- $A \oplus B$ – różnica symetryczna
 $\{x \in A \cup B \mid x \text{ należy do dokładnie jednego ze zbiorów}\}$

Zbiór potęgowy

- dla zbioru A określamy $\mathcal{P}ow(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$
- nawet jeśli $A = \emptyset$, to $\mathcal{P}ow(A) = \{\emptyset\}$, jest niepusty, ma element
- dla każdego podzbioru $B \in \mathcal{P}ow(A)$ funkcja charakterystyczna $\chi_B : A \rightarrow \{0, 1\}$ testuje należenie do B

$$\chi_B(a) = \begin{cases} 1 & a \in B \\ 0 & a \notin B \end{cases}$$

- dla dowolnej funkcji $f : A \rightarrow \{0, 1\}$ jej nośnikiem jest zbiór $\{a \in A \mid f(a) = 1\}$
- podzbiory i funkcje charakterystyczne odpowiadają sobie wzajemnie
- teoria funkcji boolowskich może opisywać działania na zbiorach

Nieskończone operacje

- $\bigcup_{i=1}^n A_i$ – elementy należące do któregoś z A_i , $i = 1, \dots, n$
- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ – elementy należące do któregoś z A_i , jest tych zbiorów nieskończenie wiele
- również przekrój $\bigcap$
ale nie różnica, nie różnica symetryczna
- „rodzina zbiorów” – po prostu zbiór, ale wiadomo o nim, że elementami są wyłącznie zbiory
oznaczenie raczej $\mathcal{A}$ niż A
- $\bigcup \mathcal{A}$ – elementy należące do któregoś ze zbiorów rodziny
- $\bigcap \mathcal{A}$ – elementy należące wszystkim zbiorom z rodziny
ale tylko przy założeniu, że $\mathcal{A} \neq \emptyset$
- rodzina indeksowana zbiorów $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
albo $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in \mathcal{I}\}$

Dopełnienie zbioru

- jeśli $X \in \mathcal{P}ow(A)$ to $X^c = \{a \in A \mid a \notin X\}$
- prawa de Morgana: $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$
- $(X^c)^c = X$, $X \setminus Y = X \cap Y^c$
- $X^c = A \setminus X$, w szczególności $\emptyset^c = A$
- $A \in \mathcal{P}ow(A)$ jest jedyneką w $\mathcal{P}ow(A)$

Ale bez sensu jest oznaczenie X^c w oderwaniu od A

nie można mówić „zbiór elementów x nie należących do X ”

skąd w ogóle się wzięły!

od czegoś trzeba zacząć

$\emptyset^c$ musiałby być zbiorem elementów wszystkich

Iloczyn kartezjański

- $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$
całkiem inny zbiór niż $B \times A$ (czy na pewno?)
- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$ nawet jeśli $A \neq \emptyset$ – nie ma elementu do pary
- $(A \times B) \times C$ oraz $A \times (B \times C)$ są formalnie różne
- ale nie dzielimy włosów na czworo, elementy nazwiemy trójkami
 $(a, b, c) \in A \times B \times C$
- $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$
- $A \times B^c = (A \times B)^c$
ale sensowne tylko gdy ustalono, że $B \subseteq \Omega$, $B^c = \Omega \setminus B$, wówczas $(A \times B)^c$ jest dopełnieniem w $A \times \Omega$

Mniej znane konstrukcje na zbiorach

- *słowo* – skończony ciąg elementów z A mogą się powtarzać (w zbiorze nie) znamy kolejność tych elementów (w zbiorze nie)
- A^* – zbiór wszystkich słów (język nad A) zawsze jest słowo puste $\varepsilon \in A^*$ jeśli jest choć jeden element w A , np. $\spadesuit \in A$, to istnieją ciągi dowolnej długości: $\spadesuit\spadesuit\spadesuit\spadesuit\ldots\spadesuit$
- $\{0, 1\}^*$ – ciągi bitów, więcej w informatyce nie trzeba
- *wielozbiór* – liczymy krotność wystąpienia elementu, ale już nie kolejność funkcje charakterystyczne wielozbiorów $A \rightarrow \mathbb{N}$ będziemy liczyć na ile sposobów można wybrać pięć owoców mając do dyspozycji jabłko, gruszki i banany $40 = 2^3 \cdot 5$, 40 ma rozkład trzy dwójki i piątkę, kolejność nieważna, ale krotność tak

Ważne rodzaje relacji na zbiorze

- porządek: antysymetryczna (więc przeciwzwrotna) i przechodnia (np. $a < b$)
- słaby porządek: zwrotna, słabo antysymetryczna i przechodnia (np. $a \leq b$)
- równoważność: zwrotna, symetryczna i przechodnia (np. $a=b$)

Relacje

- Relacja = podzbiór iloczynu kartezjańskiego
- relacja binarna: $R \subseteq A \times B$, często symbol, np. $\succeq, \models, \asymp, \perp$ zapis infiksowy, zamiast $(a, b) \in R$ czy $R(a, b)$, piszemy $a R b$
- szczególne przypadki: $R = \emptyset$, $R = A \times B$
- relacja binarna na zbiorze A : $R \subseteq A \times A$
- możliwe własności relacji na zbiorze
 - zwrotność: zawsze $a R a$
 - symetria: jeśli $a R b$, to $b R a$
 - przeciwzwrotność, antysymetria – zaprzeczenia
 - słaba antysymetria: jeśli $a R b$ oraz $b R a$, to $a = b$
 - przechodniość (tranzytywność): jeśli $a R b$ oraz $b R c$, to $a R c$

Relacje równoważności

- relacja zwrotna, symetryczna i przechodnia (tranzytywna)
- klasy równoważności $[a] = \{x \in A \mid x R a\}$ dla $a \in A$
- klasy równoważności są niepuste, $a \in [a]_R$, i rozłączne: albo $[a]_R = [b]_R$ albo $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$
- podział na klasy równoważności $A = \bigcup \{[a]_R \mid a \in A\}$
- podziałem zbioru A jest rodzina zbiorów niepustych $\mathcal{A}$ taka, że
 - $A = \bigcup \mathcal{A}$ (w szczególności $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}ow(A)$)
 - jeśli $X, Y \in \mathcal{A}$, $X \neq Y$, to $X \cap Y = \emptyset$
- każdy podział określa relację równoważności mianowicie $a \equiv b$ o ile $a, b \in X$ dla pewnego $X \in \mathcal{A}$
- elementy rodziny $\mathcal{A}$ stają się klasami równoważności, $[a]_{\equiv} = X$ gdzie $a \in X$, X jest jedynym zbiorem, do którego należy a

Relacje równoważności – abstrakcja

- dana jest funkcja $f : A \rightarrow Z$, określamy relację
 $a \sim b \iff f(a) = f(b)$
- jest ona zwrotna, symetryczna i przechodnia, czyli równoważność
- klasa równoważności $[a]_{\sim} = \{b \in A \mid f(a) = f(b)\}$
- dana relacja równoważności $\equiv$ na zbiorze A , rozważamy zbiór klas równoważności $A/\equiv = \{[a]_{\equiv} \mid a \in A\}$ oraz funkcję $a \mapsto [a]_{\equiv}$
- relacja równoważności określona jako równość z dokładnością do pewnej abstrakcji

Operacje na relacjach binarnych

- $R \subseteq A \times B$ – rzuty na A i na B
 $\{a \in A \mid \exists b \in B. (a, b) \in R\}$
 $\{b \in B \mid \exists a \in A. (a, b) \in R\}$
- relacja może być całkowita na pierwszym i/lub drugim argumencie
- transpozycja $R^T = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$, $(R^T)^T = R$
- złożenie relacji – $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, wówczas
 $S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B. a R b, b S c\}$ (kolejność zapisu!)
bardziej informatyczny zapis: $R; S$, najpierw R , potem S
- $R \circ S$ może nie mieć sensu, a jeśli ma, to niekoniecznie jest równe
- ale $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$ gdzie $T \subseteq C \times D$
- relacja identyczności, ozn. Id albo Δ , jest elementem neutralnym składania, $Id_B \circ R = R \circ Id_A = R$

Abstrakcja – przykłady

- dwa ciągi są równoważne jeśli zawierają te same elementy
- ... albo jeśli zawierają te same elementy licząc wielokrotne wystąpienia
- dwa pliki są równoważne, jeśli mają tę samą nazwę, długość i datę
- dwa programy są równoważne, jeśli tak samo działają
- dwie fotografie są równoważne, jeśli tak samo wyglądają
- dana jest funkcja $f : A \rightarrow Z$,
elementy Z nazwiemy kolorami, funkcję f kolorowaniem, $a \sim b$ jeśli są tego samego koloru
 $A = \bigcup_{z \in Z} \{a \in A \mid f(a) = z\}$, zbiór A jest podzielony na pokolorowane części
(szczegół techniczny: jakiś kolor może nie występować wcale)

Domknięcia relacji (binarnych) na zbiorze

- niech R będzie dowolną relacją na zbiorze A , $R \subseteq A \times A$
- $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ jest zwrotna, a więc $R \cup \Delta_A$ też jest zwrotna
- $R \cup R^T$ jest symetryczna, zawiera R i jest najmniejsza taka
- jeśli $a R b$ i $b R c$, to $a R \circ R c$, w szczególności $(a, c) \in R \cup (R \circ R)$
- domknięcie przechodnie: $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, gdzie $R^1 = R$, $R^{i+1} = R \circ R^i$
jeśli $a R^+ b$ i $b R^+ c$ to również $a R c$
najmniejsza relacja przechodnia zawierająca R
- domknięcie zwrotne i przechodnie:
 $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$, gdzie $R^0 = \Delta$, $R^{i+1} = R \circ R^i$ czyli $R^* = \Delta \cup R^+$
- jeśli R jest symetryczna, to R^+ i R^* też są symetryczne
w szczególności każdą relację R można domknąć do równoważności $(R \cup R^T)^*$
- ale $R \cup R^T$ nie musi być przechodnia nawet jeśli R jest

Relacje niebinarne

- podzbiór *jakiegoś* iloczynu kartezjańskiego
- *Imie* – zbiór imion, *Nazwisko* – zbiór nazwisk, *Pesel* – zbiór prawidłowych numerów pesel, *DataUr* – zbiór sensownych dat, *Adres* – zbiór napisów, które możemy uznać za adresy
- $Imie \times Nazwisko \times Pesel \times DataUr \times Adres$ jest zbiorem potencjalnie sensownych danych osobowych
- $Student \subseteq Imie \times Nazwisko \times Pesel \times DataUr \times Adres$ jest zbiorem konkretnych danych osobowych
- $Imie \times Nazwisko \times Pesel \times DataUr \times Adres$ jest schematem relacji, *Student* jest relacją

Operacje na relacjach niebinarnych

- $R \subseteq \prod_{i=0}^n A_i$ – rzuty na składowe A_i
 $\{a_j \in A_j \mid \exists a_i \in A_i, i = 0, 1, \dots, n. (a_0, a_1, \dots, a_n) \in R\}$
- złączenie (naturalne) relacji: $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ gdzie A , B i C są zestawami atrybutów
wówczas $R \bowtie S = \{(a, b, c) \mid a R b, b S c\}$
schemat złączenia ma atrybuty ze wszystkich trzech zestawów
- $DaneOs \subseteq Imie \times Nazwisko \times Pesel$ zawiera dane osobowe
 $DaneAdr \subseteq Pesel \times Adres \times Telefon$ – dane teleadresowe
wspólnym atrybutem jest *Pesel*,
złączenie zawiera kompletne dane o osobach
- problem: co myśleć o danych osobowych bez danych teleadresowych?
i na odwrót?
a jak umieścić dane studenta, którego adres jest znany, ale telefon nie?
a czy możemy sobie pozwolić na nieznajomość peselu?

Iloczyn kartezjański uogólniony

- $Atrybut = \{Imie, Nazwisko, Pesel, DataUr, Adres\}$
- $\Pi Atrybut = \{s \mid s(Imie) \in Imie, s(Nazwisko) \in Nazwisko, \dots\}$
- $Student \subseteq \Pi Atrybut$ jest zbiorem pewnych zestawów (krotek), których atrybuty mają sensowne wartości

Student.ods — LibreOffice Calc

	A	B	C	D	E
	Imie	Nazwisko	Pesel	DataUr	Adres
1					
2	Gerard	Bazior	05251394633	13.05.2005	87-109 Kwidzyn Odrowskiego 3
3	Jan	Chodkiewicz	05231854733	18.03.2005	81-737 Gdynia Chwarznińska 33/5
4	Agnieszka	Kolak	04230184784	1.03.2004	81-234 Kielno 4
5	Bernard	Łukowski	05222829631	28.02.2005	81-620 Gdynia Górnicza 29
6	Wojciech	Miszke	06282009477	20.08.2006	81-831 Sopot Mazowiecka 73/44
7	Marzena	Songin	04311284947	12.11.2004	80-619 Gdańsk Focha 39-41 m.66
8	Marcin	Zaorski	04222938230	29.02.2004	89-534 Dziewięć Włók

- nieważna jest kolejność atrybutów, wiadomo który jest który

Funkcje, grafy, drzewa, słowa

Funkcje, zależność funkcyjna

- $R \subseteq A \times B$ – niektóre pary (a, b) , zapis $a R b$
 a należy do *dziedziny* R , b należy do *obrazu* R
- dziedzina funkcji R : $\{a \in A \mid \exists b \in B. a R b\}$
 obraz (przeciwdziedzina): $\{b \in B \mid \exists a \in A. a R b\}$
- relacja R jest funkcją częściową, jeśli $(a, b), (a, b') \in R$ implikuje, że $b = b'$ (funkcyjność = jednoznaczność)
- zapis dla funkcji częściowej $R : A \rightarrow B$, $b = R(a)$
 ale dopuszczamy, że $R(a)$ jest nieokreślone
- inne słowa: R – relacja jednoznaczna,
 wartości z B są determinowane przez wartości z A

Grafy skierowane (*directed graphs*)

- graf skierowany: wierzchołki V i krawędzie $E \subseteq V \times V$
- czyli relacja (binarna), ale myślimy o niej, że są to strzałki od wierzchołka do wierzchołka
- droga (ścieżka): $v_0 E v_1 E \dots v_{k-1} E v_k$
 pętelka: $v E v$, przeciwwrotność – brak pętelek
 cykl: dłuższa droga, której początek i koniec są tym samym wierzchołkiem
- domknięcie tranzytywne relacji E :
 $v E^+ w$ o ile istnieje jakaś ścieżka od v do w
- mogą być wagi/etykiety wierzchołków: $\ell : V \rightarrow L$
- mogą być wagi/etykiety krawędzi: $\ell : E \rightarrow L$ lub $E : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$

grafika: google+ „directed graphs”

Funkcje częściowe

Funkcja częściowa $R : A \rightarrow B$ jest

- całkowita, jeśli rzut na A jest równy A
 czyli $\forall a \in A. \exists b \in B. b = R(a)$ (wiemy już, że jest jedno b)
 zapis $R : A \rightarrow B$ (po prostu strzałka)
- „na”, jeśli rzut na B jest równy B
 czyli $\forall b \in B. \exists a \in A. b = R(a)$ (niekoniecznie jedno a)
- różnowartościowa, jeśli $(a, b), (a', b) \in R$ implikuje, że $a = a'$
- bijekcją, jeśli jest całkowita, różnowartościowa i „na”
- bijekcja $R : A \rightarrow B$ odwzorowuje elementy wzajemnie jednoznacznie
 wszystkie $a \in A$ mają do pary $b \in B$ i na odwrót

Grafy nieskierowane (*undirected graphs*)

- wierzchołki V i krawędzie E
- nie zwracamy uwagi na kierunek krawędzi, czyli są to dwuelementowe podzbiory V – końce krawędzi
- relacja sąsiedztwa $v E w$: $\{v, w\} \in E$, jest symetryczna
- stopień wierzchołka – liczba jego sąsiadów
- ścieżka i cykl definiowane są analogicznie
 żądamy, by liczba wierzchołków cyklu ≥ 3 i nie było powtórzeń
- jeśli są dwie rozłączne ścieżki od v do w , to leżą one na cyklu
- graf spójny – każde dwa wierzchołki łączy ścieżka
- dla grafu skierowanego można nie zwracać uwagi na kierunek strzałek, wówczas powstanie graf nieskierowany
- podgraf – zawiera niektóre wierzchołki i niektóre krawędzie

grafika: google+ „undirected graphs”

Drzewa (*trees, tree graphs*)

- drzewo – graf (nieskierowany) spójny i acykliczny
- graf skierowany spójny i acykliczny nie musi być drzewem
może istnieć cykl, w którym kierunki krawędzi zmieniają się
DAG – *directed acyclic graph* – ważna klasa grafów
- drzewo ukorzone (*rooted tree*) – wyróżniono w nim jeden wierzchołek
 - istnieje dokładnie jedna ścieżka od wierzchołka do korzenia (ścieżka pusta dla korzenia)
 - poziomy, korzeń: 0, jeden krok od korzenia: 1 itd
 - zazwyczaj rysujemy od korzenia na górze i kroki w dół

Słowa

- Dany zbiór A – alfabet, $a, b, \dots \in A$ – litery
- „słowo” – skończony ciąg elementów z A , $v = a_1 \dots a_k$
mogą się powtarzać, ustalona kolejność elementów
 $|v| = k$ – długość słowa, $|\varepsilon| = 0$
- A^* – zbiór wszystkich słów (język nad A)
 A^n – zbiór słów długości n , $A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$
- konkatencja (sklejanie) $(v, w) \mapsto vw$
 v jest przedrostkiem (prefiksem) w , jeśli $\exists u. vu = w$
 v jest przyrostkiem (sufiksem) w , jeśli $\exists u. uv = w$
- $\varepsilon v = v\varepsilon = v$
- na ogół nieprzemienne, np. $baba\ abba \neq abba\ baba$ ale np.
 $010101\ 01 = 01\ 010101$

Drzewa ukorzone

- relacja ojciec–syn, korzeń nie ma ojca, liść: jeśli brak syna
- drzewa uporządkowane – synowie każdego wierzchołka mają kolejność
- drzewo binarne – trochę inna konstrukcja, każdy wierzchołek ma niezależnie lewego i prawego syna (jeden z nich może istnieć gdy drugiego brak)
- drzewo pełne – jest ustalona liczba potomków, np. 2,
do pewnego poziomu ma wszystkich potomków, na najniższym poziomie tylko liście
szersza definicja: można dopuszczać, że liście są na dwu kolejnych poziomach

Słowa, porządek leksykograficzny

- porządek na A określa porządek leksykograficzny na A^*
 $v < w$ jeśli $v \neq w$ i v jest prefiksem w lub istnieje indeks k taki, że
 $v_i = w_i$ dla $i = 1, \dots, k$, $v_{k+1} < w_{k+1}$
- porządek leksykograficzny jest dobry dla encyklopedii/słownika itp.
powód: w praktyce istnieje ograniczenie długości słów
- jeśli $0 \in A$ jest najmniejszym elementem w A , to A^* zawiera po kolei
 $\varepsilon, 0, 00, 000, 0000, \dots, 0^n, \dots$
nieskończenie wiele słów jest wcześniejszych niż 1
- porządek kanoniczny: porządek leksykograficzny dotyczy fragmentów
 A^n , ale jeśli $|v| < |w|$ to $v < w$
- $\{0, 1\}^* = \varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, \dots$

Słowa a drzewa

- słowa w $\{L, P\}^*$ określają wierzchołki drzewa binarnego
 ε – start = korzeń, L – lewy syn, P – prawy syn
- LL – dwa razy w lewo, LP – w lewo, potem w prawo, itd.
- $\{0, 1\}^* = \varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 \dots$
- jedyńka na przedzie zapisu w interpretacji binarnej oznacza 2^{poziom}
 $1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111 \dots$
są to kolejne liczby naturalne w zapisie binarnym