

Matematyka dyskretna

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

sem. zimowy 2025/26

inf.ug.edu.pl/~amb/MaD

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Matematyka dyskretna sem. zimowy 2025/26 1 / 20

Grafy Grafy nieskierowane

Grafy nieskierowane

- def.: graf = zbiór wierzchołków V połączonych krawędziami $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$
- taka definicja wyklucza
 - podwójne krawędzie
 - pętelki wokół wierzchołków
 - odróżnienie krawędzi w jedną i przeciwną stronę
- wierzchołki mogą mieć etykiety
- krawędzie mogą mieć etykiety (kolory) lub wagi
- zbiór krawędzi może być pusty
- będziemy zakładać, że zbiór wierzchołków jest niepusty

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Matematyka dyskretna sem. zimowy 2025/26 3 / 20

Teoria grafów

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Matematyka dyskretna sem. zimowy 2025/26 2 / 20

Grafy Grafy nieskierowane

Kilka definicji

- jeśli $\{v, w\} \in E$ to v i w są *sąsiednie*, zapis $v E w$
- stopień wierzchołka $d(v)$ = liczba sąsiadów
- tw.: $\sum \{d(v) \mid v \in V\} = 2 \cdot |E|$
dw. każda krawędź jest liczona podwójnie
- $\Delta(G)$ oznacza największy stopień wierzchołków grafu
- ścieżka (prosta): $v_1 E v_2 \dots E v_n$, wszystkie wierzchołki różne
- cykl: dodatkowo $v_n E v_1$
- graf spójny: każde dwa wierzchołki można połączyć ścieżką
- graf acykliczny: w grafie nie ma żadnych cykli
- izomorfizm grafów G i H : bijekcja $f : V(G) \rightarrow V(H)$ zachowująca krawędzie, tzn. $\{v, w\} \in E(G)$ w.t.w. $\{f(v), f(w)\} \in E(H)$

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Matematyka dyskretna sem. zimowy 2025/26 4 / 20

Ważne przykłady

- klika K_n : $|V| = n$, $E = \mathcal{P}_2(V)$, tzn każdy wierzchołek jest połączony z każdym
- graf pusty: $E = \emptyset$
- linia L_n : $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{\{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}\}$
- cykl C_n : krawędzie j.w. i dodatkowo $\{v_n, v_1\} \in E$
- graf dwudzielny: $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, sąsiednie wierzchołki należą zawsze do różnych klas
 - zadania przydzielane agentom
 - komunikaty przydzielane kanałom

Spójność

- graf jest spójny, jeśli każde dwa wierzchołki można połączyć ścieżką
- składowa spójności: maksymalny podgraf spójny
- lepsze własności spójności:
 - dwa wierzchołki można połączyć ścieżką nawet po usunięciu $k-1$ krawędzi
 - graf będzie spójny nawet po usunięciu $k-1$ krawędzi
 - graf będzie spójny nawet po usunięciu k wierzchołków
- jeśli jest mało krawędzi, to trudniej o spójność

Tw.: Liczba składowych spójności grafu G jest co najmniej $|V(G)| - |E(G)|$

dw.: graf pusty ma $|V(G)|$ składowych.

w niepustym grafie usuwamy krawędź, liczymy składowe, po dodaniu tej krawędzi, być może dwie składowe się połączą

Kolorowanie wierzchołków

- Kolorowaniem jest funkcja $f : V(G) \rightarrow K$ taka, że końce krawędzi mają różne kolory $\{v, w\} \in E(G) \Rightarrow f(v) \neq f(w)$
- liczba chromatyczna grafu $\chi(G)$: najmniejsza moc zbioru kolorów dopuszczającego kolorowanie
- $\chi(G) = 1$ jedynie dla grafu pustego
- $\chi(G) = 2$ w.t.w. graf jest dwudzielny
- tw.: jeśli graf G da się narysować na płaszczyźnie, to $\chi(G) \leq 4$ (trudny problem długo nierozwiązany)
- tw.: $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$
dw.: usuwamy wierzchołek, z zał. indukcyjnego istnieje kolorowanie, dodatkowy wierzchołek ma najwyżej $\Delta(G)$ sąsiadów więc istnieje dostępny dla niego kolor
- $\chi(K_n) = n$

Cykle

- cyklem (prostim) jest ścieżka (prosta) o tym samym końcu co początku
- Tw.: graf jest 2-kolorowalny w.t.w. nie ma cykli nieparzystej długości
dw.: jeśli cykl ma nieparzystą liczbę krawędzi, to już wierzchołków cyklu nie da się kolorować dwoma kolorami.
Na odwrót: dla każdej ze składowych wybieramy wierzchołek v_0 w tej składowej i dzielimy wierzchołki na dwa podzbiory $\{v \in V \mid \text{odl}(v, v_0) \text{ parzysta}\}$ oraz $\{v \in V \mid \text{odl}(v, v_0) \text{ nieparzysta}\}$.
Jeśli nie ma cyklu nieparzystej długości to nie będzie istniała krawędź wewnątrz któregośkolwiek z tych podzbiorów, czyli jest to 2-kolorowanie

Ścieżki i cykle Eulera

- ścieżka Eulera w grafie przechodzi przez każdą krawędź dokładnie raz
- cykl Eulera j.w.
- Tw.: grafie istnieje cykl Eulera w.t.w. każdy jego wierzchołek ma parzysty stopień.
Istnieje ścieżka Eulera w.t.w. być może dwa wierzchołki mają nieparzysty stopień (wówczas nie ma cyklu Eulera, a ścieżka musi mieć te dwa wierzchołki jako końce).

Drzewa

- drzewo = graf spójny i acykliczny
- graf acykliczny jest sumą drzew (składowe spójności), nazwa: las
- liść: wierzchołek stopnia 1 (albo 0 jeśli jest to jedyny wierzchołek drzewa)
- własności drzew
 - spójny podgraf też jest drzewem
 - każde dwa wierzchołki są połączone jedną ścieżką
 - dodanie nowej krawędzi generuje cykl (i graf nie będzie już drzewem)
 - usunięcie krawędzi rozspójnia graf (i j.w.)
 - jeśli istnieją dwa wierzchołki, to istnieją dwa liście
 - $|V(G)| - |E(G)| = 1$

Ścieżki i cykle Hamiltona problem komiwojażera

- ścieżka Hamiltona w grafie odwiedza każdy wierzchołek jeden raz
- cykl Hamiltona j.w.
- istnienie ścieżek i cykli Hamiltona jest w praktyce znacznie ważniejszym problemem niż ścieżek Eulera
- i nie ma żadnych prostych warunków gwarantujących istnienie takich ścieżek/ cykli
- problem komiwojażera: krawędzie w grafie mają wagi (odległości wierzchołków) – zadanie znaleźć cykl Hamiltona z najmniejszą sumą wag krawędzi

Drzewa rozpinające

- Def: drzewo rozpinające graf jest to podgraf o tym samym zbiorze wierzchołków.
- Tw.: każdy graf spójny zawiera drzewo rozpinające
dw.: usuwamy krawędzie jeśli są one częścią cyklu, spójność grafu zostaje wówczas zachowana
albo inaczej: dodajemy krawędzie pilnując by nie powstał cykl, na końcu musi być osiągnięta spójność
- Problem: dany graf z wagami krawędzi, znaleźć drzewo rozpinające o minimalnym koszcie (suma wag)
- Tw.: minimalne drzewo rozpinające znajduje algorytm:
początek: pusty graf
porządkujemy krawędzie wg wag
dodajemy krawędź o najmniejszej wadze, która nie generuje cyklu

Twierdzenie Halla

Twierdzenie Halla o reprezentantach

- dana rodzina zbiorów $M_k \subseteq M, k = 1, \dots, \ell$
zadanie: wybrać różnych reprezentantów $m_k \in M_k$ dla wszystkich zbiorów
- interpretacja bardziej ludzka: każda kobieta $k, k = 1, \dots, \ell$ ma określony zbiór kandydatów na męża M_k
czy mogą wszystkie jednocześnie wybrać mężów?
- tw. Halla: warunkiem koniecznym i wystarczającym jest by dla każdego $J \subseteq \{1, \dots, \ell\}$ zachodził warunek $|J| \leq \left| \bigcup_{j \in J} M_j \right|$
- dw.: zbiór indeksów J jest krytyczny, jeśli $|J| = \left| \bigcup_{j \in J} M_j \right|$,
od najmniejszych takich zbiorów trzeba zacząć wybór reprezentantów

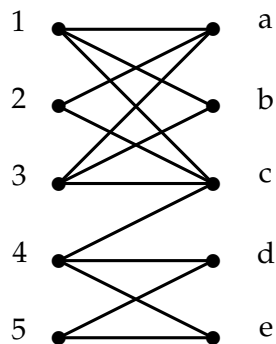
Sztuczka karciana

- talía kart składa się z 13 kart $\{2, 3, \dots, 10, W, D, K, A\}$ w kolorach $\{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$, razem 52 karty
- sztuczka karciana: pięć osób wybiera po jednej karcie, asystent pokazuje mistrzowi cztery, ten odgaduje piątą
- dane dwa zbiory: ciągi 4-elementowe, zbiory 5-elementowe
ciąg pasuje do zbioru jeśli się w nim zawiera
- każdemu zbiorowi 5 kart odpowiada $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ ciągów 4 kart $\geq 52 - 4$
- tw. Halla zagwarantuje, że istnieje funkcja różnowartościowa przypisująca zbiorom ciągi – pokazywane przez asystenta
każdy pokazany ciąg wyznaczy piątą kartę

Grafy dwudzielne

- graf dwudzielny: wierzchołki można podzielić na dwa rozłączne podzbiory $V = V_1 \cup V_2$ tak, że krawędzie są pomiędzy różnymi zbiorami $E \subseteq \{\{v_1, v_2\} \mid v_i \in V_i\}$
- rodzina zbiorów $M_k \subseteq M, k = 1, \dots, \ell$ definiuje graf: $V_1 = \{1, \dots, \ell\}$, $V_2 = \bigcup_{k=1}^{\ell} M_k$,
krawędź łączy j z m gdy $m \in M_j$,
zbiór M_j staje się zbiorem sąsiadów j
- skojarzenie: wybór krawędzi tak, by żaden wierzchołek nie miał dwóch krawędzi
- tw. Halla w jęz. grafów dwudzielnych: istnieje skojarzenie i obejmie wszystkie wierzchołki V_1 wtedy i tylko wtedy, gdy każdy podzbiór $V_0 \subseteq V_1$ ma co najmniej $|V_0|$ sąsiadów w V_2

Twierdzenie Halla – przykład



Rodzina zbiorów to graf dwudzielny:

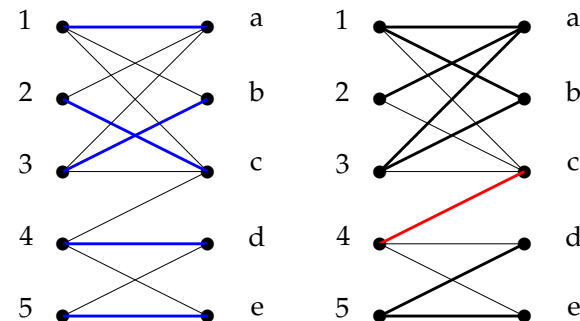
$M_1 = \{a, b, c\}$, $M_2 = \{a, c\}$, $M_3 = \{a, b, c\}$,
 $M_4 = \{c, d, e\}$, $M_5 = \{d, e\}$. Założenie tw. Halla
są spełnione. Krytyczny jest cały zbiór indeksów:
 $|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5| = 5$ oraz $\{1, 2, 3\}$:
 $|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = 3$.

Wybór reprezentantów trzeba zacząć od jednego
z pierwszych indeksów, np. $m_1 = a \in M_1$. Po
usunięciu wierzchołków 1 i m_1 krytyczny staje się
zbiór $\{2\}$: $|M_2 \setminus \{m_1\}| = 1$, obowiązkowy jest
wybór $m_2 = c$. Wówczas $|M_3 \setminus \{m_1, m_2\}| = 1$
oraz $|M_4 \cup M_5 \setminus \{m_1, m_2\}| = 2$, można je
obsłużyć w dowolnej kolejności.

Sztuczka karciana c.d.

- zadanie: dany zbiór 5 kart, znaleźć ciąg 4 z nich, tak by jednoznacznie wyznaczona była piąta
- w pięciu kartach musi powtórzyć się kolor (zasada Dirichleta) – pierwszą kartą w ciągu będzie karta z powtórzonym koloru, wyznaczy ona kolor brakującej karty
- 13 możliwych wartości kart traktujemy (mod 13) każde dwie karty są w odległości najwyżej 6
- z dwu kart w tym samym kolorze pokazujemy niższą, np. 3 i 10 są w odległości 6, mianowicie 10, W, D, K, A, 2, 3 niższą jest 10
- pozostałe trzy karty można uporządkować na 6 sposobów numerujemy te permutacje według algorytmu: NSW-1, NWS-2, SNW-3, SWN-4, WNS-5, WSN-6
- brakująca karta ma kolor pierwszej, a wysokość pierwszej + numer permutacji (mod 13) pozostałych trzech kart

Przykład skojarzenia i jego braku



Po wyborze $m_4 = c$
założenia tw. Halla dla
pozostałych elementów
nie są spełnione:
 $|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \setminus \{m_4\}| = 2$
nie ma trzech
reprezentantów dla trzech
indeksów.

Przykład skojarzenia

- graf regularny – wszystkie wierzchołki są tego samego stopnia
- tw.: graf dwudzielny regularny ma skojarzenie doskonałe (więc i równą liczbę wierzchołków obu klas)
dw.: $|E| = \sum \{d(v) \mid v \in V_1\} = \sum \{d(v) \mid v \in V_2\}$, skoro wszystkie stopnie są równe, to $|E| = d \cdot |V_1| = d \cdot |V_2|$
i spełnia założenia tw. Halla:
pозbiór $V_0 \subseteq V_1$ ma $d \cdot |V_0|$ krawędzi wychodzących, zbiór jego sąsiadów $V_3 \subseteq V_2$ ma co najmniej tyle krawędzi, czyli $d \cdot |V_0| \leq d \cdot |V_3|$