

Matematyka dyskretna

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

sem. zimowy 2025/26

inf.ug.edu.pl/~amb/MaD

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Matematyka dyskretna sem. zimowy 2025/26 1 / 23

Dwumian Newtona Podzbiory k -elementowe

Podzbiory k -elementowe

- liczba *wszystkich* podzbiorów zbioru n -elementowego wynosi 2^n
 - pytanie: ile jest podzbiorów k -elementowych przy ustalonym k
- oznaczenia:
 - $\mathcal{P}_k(n)$ – rodzina podzbiorów k -elementowych zbioru n -elementowego
 - $\binom{n}{k}$ – liczba tych podzbiorów, symbol Newtona, „ n po k ”, wielkość określona tylko dla $n, k \in \mathbb{N}$
- przyjmujemy $\binom{n}{k} = 0$ gdy $n < 0$ lub $k < 0$
- $\binom{n}{k} = 0$ dla $k > n$ – nie można wybrać więcej elementów

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Matematyka dyskretna sem. zimowy 2025/26 3 / 23

Dwumian Newtona

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Matematyka dyskretna sem. zimowy 2025/26 2 / 23

Dwumian Newtona Podzbiory k -elementowe

Własności symbolu Newtona

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ podzbiór pusty i cały zbiór
- $\binom{n}{1} = n$ podzbiór 1-elementowy to pojedynczy element
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
odwzorowanie $A \mapsto n \setminus A$ jest bijekcją, każdy zbiór k elementów wybranych wyznacza zbiór $(n-k)$ elementów niewybranych
- zamiast o k -elementowych podziorach można mówić o podziałach na dwa podzbiory: k i $n-k$ elementowe

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Matematyka dyskretna sem. zimowy 2025/26 4 / 23

Wzór rekurencyjny

- $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
 - w większym zbiorze jest element n , każdy podzbiór k -elementowy albo zawiera ten element, albo nie
tzn. albo pozostałe $k-1$ elementów było wybranych z mniejszego zbioru, albo wszystkie były wybrane z tego mniejszego zbioru
 - $\mathcal{P}_k(n+1) = \{A \cup \{n\} \mid A \in \mathcal{P}_{k-1}(n)\} \cup \mathcal{P}_k(n)$
- wzór obowiązuje również w skrajnych przypadkach

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n}{-1} + \binom{n}{0} = 0 + 1$$

$$\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n} + \binom{n}{n+1} = 1 + 0$$

Program rekurencyjny

- wzór rekurencyjny można wprost przenieść do programu

```
int newton(int n, int k){
    if(n<0 || n<k || k<0) return 0;
    else if ((k==0) && (n==0)) return 1;
    else return newton(n-1,k) + newton(n-1,k-1);
}
```

- ten program nie jest specjalnie mądry, funkcja jest wielokrotnie wywoływana z tymi samymi parametrami
 - będzie wywoływana co najmniej tyle razy ile wynosi jej wartość – całkiem niepotrzebnie

$$\binom{6}{4} = \binom{5}{4} + \binom{5}{3} = \binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{4}{3} + \binom{4}{2} = \dots$$

Trójkąt Pascala

- w $n+1$ wierszu każdy z elementów jest sumą dwóch elementów z poprzedniego wiersza stojących nad nim,
(zaczynamy od $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$)

					1					
					1		1			
				1	2		1			
			1	3	3		1			
		1	4	6	4		1			
	1	5	10	10	5		1			
	1	6	15	20	15		6		1	
	1	7	21	35	35		21		7	1
1	8	28	56	70	56		28		8	1

Program iteracyjny

```
int newton[max][max]; // newton(n,k)
int main(){
    for (n=0;n<max;n++) newton[n][0]=1;
    for (n=0;n<max;n++) newton[n][n]=1;
    for (n=0;n<max;n++)
        for (k=1;k<n;k++)
            newton[n][k]=newton[n-1][k]+newton[n-1][k-1];
}
```

- trójkąt Pascala będzie umieszczany w tablicy
- zajęte będą jedynie miejsca $\text{newton}[n][k]$ dla $0 \leq k \leq n$
- instrukcja wypełniania tablicy dokładnie odpowiada wzorowi rekurencyjnemu – ale wartości już obliczone są odczytywane, a nie liczone ponownie

Wzór na symbol Newtona

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
- dw. kombinatoryczny:
 - ciągów bez powtórzeń długości k w zbiorze n -elementowym jest $\frac{n!}{(n-k)!}$
 - każdy podzbiór k -elementowy powstaje przez wyliczanie jego elementów jakiejś kolejności, jest $k!$ takich wyliczeń
 - tak więc liczba podzbiorów, nie ciągów, wynosi $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ (zasada wielokrotnego zliczania)

Oszacowania wielkości symbolu Newtona

- $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k$
- $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1} \leq \frac{n^k}{k!} \leq \left(\frac{e \cdot n}{k}\right)^k$
ostatnie oszacowanie korzysta ze wzoru Stirlinga $k! \approx \sqrt{2\pi k} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k$
- dla $n = 2 \cdot k$ mamy $2^k \leq \binom{2 \cdot k}{k} \leq (2 \cdot e)^k$
- przy ustalonym n symbol Newtona jest największy pośrodku, tzn. dla $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ i $k = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$
dw.: $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$ jest równoważne $2 \cdot k < n-1$
czyli funkcja argumentu k rośnie do $n/2$ i maleje dla większych k

Wzór na symbol Newtona c.d.

- dw.: przez indukcję matematyczną
 - dla $n = 0$ jest tylko jedno sensowne k , $\binom{0}{0} = 1$
 - dla większych n ale $k = 0$ bezpośrednio sprawdzamy $\binom{n}{0} = 1 = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!}$
 - zakładamy prawdziwość wzoru dla pewnego n i zakładamy $0 < k$
- $$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n-k+1)!}$$

Przykłady zastosowań

- ile jest różnych prostokątów w prostokącie o wymiarach $m \times n$?
 - wybieramy dwa punkty spośród $m+1$ w poziomie oraz dwa spośród $n+1$ w pionie, czyli $\binom{m+1}{2} \cdot \binom{n+1}{2}$
- ile jest łamanych łączących końce przekątnej w prostokącie?
 - długość ścieżki wynosi $m+n$, wybieramy wśród nich m poziomych odcinków i n pionowych, wyborów jest $\binom{m+n}{n}$
- ile jest funkcji niemalejących $m \rightarrow n+1$?
 - wykres łączy przeciwległe wierzchołki prostokąta $m \times n$
- ile jest rozwiązań w $\mathbb{N}$ równania $x_0 + \dots + x_m = n$?
 - funkcja $k \mapsto \sum_{i=0}^k x_i$, $k < m$ jest niemalejąca, przeciwdziedzina jest $n+1$, m krotnie wybierana jest wartość, $x_m = n - \sum_{i=0}^{m-1} x_i$ nie jest już wybierane

Dwumian Newtona

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$$

- dw.: mamy iloczyn n czynników $(x + y)$, wybieramy k z nich, w których mnożymy przez x , w pozostałych mnożymy przez y , jest $\binom{n}{k}$ wyborów, stąd współczynnik przy $x^k \cdot y^{n-k}$

Własności współczynników Newtona c.d.

- $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{k-1} = \binom{n}{k}$ suma przekątnej trójkąta Pascala
- suma jest naprawdę od $i=k-1$
- podzbiór $k-1$ -elementowy w $\{0, \dots, i-1\}$ wyznacza zbiór k -elementowy w n , największym elementem jest i oraz $k-1$ pozostałych i na odwrót
- użyjemy tej obserwacji w programie generującym k -elementowe podzbiory

Własności współczynników Newtona

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, mianowicie podstawiamy $x = y = 1$.
Jest to zgodne z obserwacją $\bigcup_{k=0}^{|X|} \mathcal{P}_k(X) = \mathcal{P}(X)$
- $\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0$, dla $n > 0$
mianowicie podstawiamy $x = -1, y = 1$.
- jeśli $X \neq \emptyset$, to podzbiorów parzystej mocy jest tyle samo co nieparzystej
- inny dowód: podzbiory w $X \cup \{x\}$ są postaci $A \setminus \{x\}$ oraz $A \cup \{x\}$ parami, jeden mocy parzystej, drugi nieparzystej
- nie jest to prawdą dla $X = \emptyset$ czyli $n = 0$
 $0^0 = 1 = (-1)^0 \cdot \binom{0}{0}$

Własności współczynników Newtona c.d.

- $\sum_{i=0}^n \binom{m}{i} \binom{k}{n-i} = \binom{m+k}{n}$
- wybór n osób spośród m mężczyzn i k kobiet można zacząć od wyboru liczb wybranych mężczyzn i kobiet
- jeśli $k = 1$, to sprowadza się do znanego już wzoru
 $\binom{m}{n-1} \binom{1}{1} + \binom{m}{n} \binom{1}{0} = \binom{m+1}{n}$

Wzór trójmianowy

- $\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} \quad 0 \leq k \leq m \leq n$
- można po prostu wyliczyć

$$\frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \cdot \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)! \cdot (n-m)!}$$
- odpowiada to podziałowi zbioru n -elementowego na trzy podzbiory: k -elementowy, $m-k$ -elementowy oraz $n-m$ -elementowy
- uogólniony symbol Newtona

$$\binom{n}{k, m-k, n-m} = \frac{n!}{k! \cdot (m-k)! \cdot (n-m)!}$$

$$(x + y + z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot \left(\sum_{m=k}^n \binom{n-k}{m-k} y^{m-k} z^{n-m} \right)$$

Permutacje z powtórzeniami

- ile różnych wyrazów można utworzyć przestawiając litery w słowie MATEMATYKA ?
- 10 liter można przestawiać na $10!$ sposobów
- ale przestawienie dwóch liter M da to samo słowo, podobnie trzech A oraz dwóch T
- każde słowo jest liczone $2! \cdot 3! \cdot 2!$ razy
- czyli różnych słów jest $\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$
- albo inaczej: z 10 miejsc mamy wybrać dwa, gdzie stanie litera M, trzy dla A, dwa dla T i pozostałe miejsca dla E, Y i K
- czyli $\binom{10}{2, 3, 2, 1, 1, 1}$ sposobów

Podziały

- na ile sposobów można podzielić zbiór n -elementowy A na zbiory $A_1, \dots, A_\ell$ o mocach $n_1, \dots, n_\ell$, $\sum_{i=1}^{\ell} n_i = n$?
- można ustawiać wszystkie elementy w ciąg przypisując po kolei do zbiorów $A_1, \dots, A_\ell$, ale nie rozróżniając elementów w poszczególnych zbiorach
- czyli $\frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_\ell!}$ sposobów
- w szczególności wybór k elementów z n jest podziałem na k wybranych i $n-k$ pozostałych: zwykły symbol Newtona
- uogólniony symbol Newtona $\binom{n}{n_1, \dots, n_\ell} = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_\ell!}$ gdzie $n_1 + \dots + n_\ell = n$.

Współczynniki wielomianów

- Rozważamy wielomian $(x_1 + \dots + x_\ell)^n$ ℓ zmiennych
- jest on sumą wyrazów $x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell}$ gdzie $n_1 + \dots + n_\ell = n$
- współczynnikiem jest liczba sposobów rozmieszczenia n obiektów (czynników $(x_1 + \dots + x_\ell)$) w ℓ pudełkach (zmiennych $x_1, \dots, x_\ell$) o pojemnościach $n_1, \dots, n_\ell$
- czyli $(x_1 + \dots + x_\ell)^n =$

$$\sum_{0 \leq n_1, \dots, n_\ell, n_1 + \dots + n_\ell = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_\ell} \cdot x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell}$$

Permutacje elementów nieodróżnialnych i podziały uporządkowane

- niech zbiór n -elementowy A jest podzielony na ℓ typów liczności n_i , $i = 1, \dots, \ell$, $\sum_{i=1}^{\ell} n_i = n$
 - wszystkich permutacji jest $n!$, każda odróżnialna wyznacza $n_1! \cdot \dots \cdot n_{\ell}!$ różnych permutacji A
 - więc odróżnialnych permutacji jest $\frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_{\ell}!}$
- podział zbioru n -elementowego A na zbiory $A_1, \dots, A_{\ell}$:
 - zbiory A_i ustawiamy po kolei, każda z $n!$ permutacji wyznaczy podział permutacja wewnątrz zbiorów A_i nie zmieni podziału
 - podziałów jest $\binom{n}{n_1, \dots, n_{\ell}} = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_{\ell}!}$

Podziały nieuporządkowane, wzór

- liczba podziałów nieuporządkowanych wynosi

$$\frac{n!}{|A_1|! \cdot \dots \cdot |A_{\ell}|!} \cdot \frac{1}{b_1!} \cdot \dots \cdot \frac{1}{b_m!}$$

gdzie wielozbiór $[|A_1|, \dots, |A_{\ell}|] = [b_1 \cdot n_1, \dots, b_m \cdot n_m]$

$$\sum_{j=1}^m b_j = \ell, \quad \sum_{j=1}^m b_j \cdot n_j = \sum_{i=1}^{\ell} |A_i| = n.$$

Podziały nieuporządkowane

- nieuporządkowany podział zbioru A to podział na zbiory $A_1, \dots, A_{\ell}$ gdy *nie* odróżniamy zbiorów A_i
- ale: nie możemy *nie* odróżniać zbiorów różnej liczności

- krawędzie w kwadracie $\binom{4}{2} = 6$
 vs podział 4 wierzchołków na pary $\binom{4}{2} \cdot \frac{1}{2!} = 3$
 podział 6 wierzchołków na pary $\frac{6!}{(2!)^3 \cdot 3!} = 15$
 podział 6 wierzchołków na trójki $\frac{6!}{(3!)^2 \cdot 2!} = 10$
 podział 9 wierzchołków na trójki $\frac{9!}{(3!)^3 \cdot 3!} = 280$
 podział 9 na dwie pary i piatkę $\frac{9!}{(2!)^2 \cdot 2! \cdot 5!} = 378$