

Matematyka dyskretna

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

sem. zimowy 2025/26

inf.ug.edu.pl/~amb/MaD

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Matematyka dyskretna sem. zimowy 2025/26 1 / 9

Kombinatoryka Liczenie

Liczenie

- $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, ..., $n + 1 = \{0, \dots, n\}$
 $n \leq m$ jeśli $n \subseteq m$
- jeśli liczymy elementy „raz, dwa, trzy, ..., n ”,
to ustalamy bijekcję ze zbiorem $\{0, 1, \dots, n-1\}$
- jeśli $n \leq m$, to istnieje funkcja różnowartościowa $f : n \rightarrow m$
- a jeśli $n > m$, to nie istnieje funkcja (całkowita) różnowartościowa
dw.: nie istnieje taka funkcja gdy $m = 0 = \emptyset$,
jeśli nie istnieje dla pewnego m , to również nie dla $m + 1$,
bo gdyby istniała dla $n > m + 1$, taką funkcję można by trochę
zmienić i mieć funkcję $n-1 \rightarrow m$ wbrew założeniu
- bijekcja między tymi zbiorami istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $n = m$
- zbiór mocy n – zbiór, dla którego istnieje bijekcja z n
- oznaczenie $|A|$ – moc zbioru A

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Matematyka dyskretna sem. zimowy 2025/26 3 / 9

Kombinatoryka

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Matematyka dyskretna sem. zimowy 2025/26 2 / 9

Kombinatoryka Liczenie

Zbiory skończone i nieskończone

- zbiór skończony – $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
jest to *de facto* zapis bijekcji
- def.: zbiór nieskończony $\Leftrightarrow$ jeśli nie ma bijekcji z żadnym n
- wówczas istnieje funkcja różnowartościowa $f : \mathbb{N} \rightarrow X$
dw.: definiujemy $f(i)$ jako dowolny element w X różny od
dotychczasowych $f(0), f(1), \dots, f(i-1)$,
gdyby nie istniał (niech i będzie pierwszym takim przypadkiem), to
byłaby bijekcja $f : i \rightarrow X$
- przykład: $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ określone wzorem $f(i) = 2 \cdot i$ jest bijekcją liczb
naturalnych i parzystych
- tw.: zbiór jest nieskończony w.t.w. gdy jest równoliczny z pewnym
swoim podzbiorem właściwym

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Matematyka dyskretna sem. zimowy 2025/26 4 / 9

Zasada szufladkowa Dirichleta (*Pigeonhole principle*)

- jeśli $n > m$ i wkładamy n przedmiotów do m szuflad, to w co najmniej jednej szufladzie muszą znaleźć się co najmniej dwa przedmioty
- wkładanie do szuflad to funkcja $f : n \rightarrow m$ nie może być różnowartościowa, $\exists i, j. i \neq j, f(i) = f(j)$
- niektórzy uczestnicy przyjęcia witają się ze sobą – co najmniej dwóch z nich witało się z tą samą liczbą gości
 - dw.: dla każdego z uczestników u mamy liczbę $witaj(u)$ $0 \leq witaj(u) < n$, gdzie n liczba uczestników, ale liczby 0 i $n - 1$ nie mogą być jednocześnie zajęte czyli n wartości jest w $n - 1$ szufladkach

Zasada szufladkowa Dirichleta, druga strona medalu

- jeśli $n < m$ i wkładamy n przedmiotów do m szuflad, to co najmniej jedna szuflada pozostaje pusta
- gdyby tak nie byłoby, to można by odwrócić role – szufladom przypisać dowolny przedmiot do niej włożony wówczas w dwóch szufladach musi być ten sam przedmiot – sprzeczność

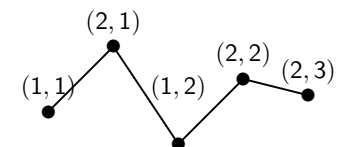
Zasada szufladkowa Dirichleta, inny przykład

- tw.: każdy algorytm kompresji musi wydłużać niektóre pliki
 - dw.: gdyby nie wydłużał żadnego, a skracał choć jeden, np. $|zip(f)| = \ell < |f|$, to funkcja $zip : \{0, 1\}^\ell \cup \{f\} \rightarrow \{0, 1\}^\ell$ byłaby różnowartościowa ze zbioru większego w mniejszy.

Zasada szufladkowa Dirichleta, przykład całkiem nieoczywisty

- dla dwóch liczb a_1, a_2 istnieje podciąg dwuelementowy monotoniczny – oczywiste
- teraz ciąg ma 5 elementów, szukamy podciągu trzelementowego
 - pierwsze 4 elementy muszą wyglądać tak: 
 - i dowolny piąty element daje ciąg trzelementowy
- tw.: każdy ciąg $n^2 + 1$ elementów ma podciąg $n + 1$ elementowy monotoniczny
 - dla każdego indeksu i określamy parę liczb $(up(i), down(i))$ — maks. długość ciągów rosnącego i malejącego kończących się w i
 - ta funkcja jest różnowartościowa

- a więc nie może przyjmować wartości jedynie ze zbioru $\{1, \dots, n\} \times \{1..n\}$



Zasada Dirichleta jeszcze raz

- jeśli umieszczamy n przedmiotów w m szufladach i $n > m \cdot r$, to w jednej z szuflad musi być co najmniej $r + 1$ przedmiotów
- jeśli umieszczamy n przedmiotów w m szufladach, a każda ma pojemność q_i , $i=1, \dots, m$ i $n > \sum_{i=1}^m q_i$, to w jednej z szuflad musi być nadkomplet, czyli umieszczonych więcej niż q_i przedmiotów
- wśród 6 osób, albo trzy znają się nawzajem, albo wcale
- dw.: wybieramy osobę X , pozostaje 5 osób, znanych lub nie X , a więc są trzy które X zna lub trzy których nie zna; jeśli X zna 3 z nich, to albo są one trójką nieznanymi albo dwie się znają, razem z X tworzą trójkę znanych, jeśli X nie zna 3 osób, to analogiczne rozumowanie