Analiza kosztu zamortyzowanego

rozpatrujemy ciąg n operacji: $o_1, o_2, \ldots, o_n$

niech c_i oznacza koszt (czas pesymistyczny) i-tej operacji

czas pesymistyczny całego ciągu operacji to

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} c_i$$

koszt zamortyzowany na jedną operację to

$$\frac{T(n)}{n}$$

Analiza kosztu zamortyzowanego

metoda potencjału

wymyślamy (sprytnie) funkcję potencjału Φ

niech Φ_i oznacza wartość potencjału po wykonaniu i-tej operacji

Φ musi spełniać warunki:

$\Phi_0 = 0$ (Φ_0 to potencjał przed wykonaniem operacji o_1)
$\Phi_i \geq 0$ dla $i > 0$

$\hat{c}_i$, koszt zamortyzowany i-tej operacji, definiujemy:

$$\hat{c}_i = c_i + \left(\Phi_i - \Phi_{i-1}\right)$$

Analiza kosztu zamortyzowanego

metoda potencjału

Łatwo sprawdzić, że

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \leq \sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i$$

czyli

$$T(n) \leq \sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i$$

Funkcja potencjału jest tak dobrana, żeby łatwo było oszacować jednorodnie $\hat{c}_i$ a zatem i sumę $\hat{c}_i$.

Analiza kosztu zamortyzowanego

przykład: tablice dynamiczne

ciąg n operacji *wstaw* lub *usuń*

num $_i$ - ilość elementów w tablicy po i-tej operacji

size $_i$ - rozmiar tablicy po i-tej operacji

c_i - koszt (prawdziwy) i-tej operacji

$\hat{c}_i$ - koszt zamortyzowany i-tej operacji

wstawianie

$$\mathit{size}_i = \begin{cases} \mathit{size}_{i-1} & \text{gdy} \ \ \mathit{num}_{i-1} < \mathit{size}_{i-1} \\ 2\,\mathit{size}_{i-1} & \text{gdy} \ \ \mathit{num}_{i-1} = \mathit{size}_{i-1} \end{cases}$$

$$\mathit{num}_i = \mathit{num}_{i-1} + 1$$

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \ \ \mathit{num}_{i-1} < \mathit{size}_{i-1} \\ \mathit{size}_{i-1} + 1 & \text{gdy} \ \ \mathit{num}_{i-1} = \mathit{size}_{i-1} \end{cases}$$

usuwanie

$$\mathit{size}_i = \begin{cases} \mathit{size}_{i-1} & \text{gdy} \quad \mathit{num}_{i-1} > \frac{1}{4}\mathit{size}_{i-1} \\ \frac{1}{2}\mathit{size}_{i-1} & \text{gdy} \quad \mathit{num}_{i-1} = \frac{1}{4}\mathit{size}_{i-1} \end{cases}$$

$$\mathit{num}_i = \mathit{num}_{i-1} - 1$$

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad \mathit{num}_{i-1} > \frac{1}{4}\mathit{size}_{i-1} \\ \frac{1}{4}\mathit{size}_{i-1} - 1 & \text{gdy} \quad \mathit{num}_{i-1} = \frac{1}{4}\mathit{size}_{i-1} \end{cases}$$

funkcja potencjału

$$\Phi_i = \begin{cases} 2\mathit{num}_i - \mathit{size}_i & \text{gdy} \quad \mathit{num}_i \geq \frac{1}{2}\mathit{size}_i \\ \frac{1}{2}\mathit{size}_i - \mathit{num}_i & \text{gdy} \quad \mathit{num}_i < \frac{1}{2}\mathit{size}_i \end{cases}$$

$$\hat{c}_1 = c_i + \left(\Phi_i - \Phi_{i-1}\right)$$