

METODA SYMPLEKS

*

standardowa
postać PL

Rozważamy zadanie programowania liniowego

$$c^T x \rightarrow \max$$

$$Ax = b, \quad x \geq 0,$$

gdzie

$$c^T = [c_1, \dots, c_n], \quad x = [x_1, \dots, x_n]^T, \quad A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad b = [b_1, \dots, b_m]^T.$$

Układ $Ax = b$ przedstawiamy w postaci bazowej

$$x_{B_0} + B_0^{-1} D x_{D_0} = B_0^{-1} b$$

z macierzą bazową B_0 . Równoważnie

$$A_0 := B_0^{-1} A, \quad b_0 := B_0^{-1} b \quad \Rightarrow \quad A_0 x = b_0.$$

Niech x^0 będzie dopuszczalnym rozwiązaniem bazowym, $x_{B_0}^0$ to jego zmienne bazowe, $x_{D_0}^0$ to zmienne dopełniające, $x_{D_0}^0 = 0$.

* wariant 2 założeniem, że x^0 jest dopuszczalne

METODA SYMPLEKS cd.

Obliczamy $c_0 = c - A_0^T c_{B_0}$, $z_0 = c^T x^0$ oraz tworzymy

$$Y_0 = [y_{ij}]_{(m+1) \times (n+1)} \quad Y_0 = \left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array} \right].$$

Sprawdzamy **kryterium stopu**: czy $c_0 \leq 0$?

Jeśli tak - to x^0 jest rozwiązaniem optymalnym.

Jeśli nie - to wybieramy $s \in \{1, \dots, n\}$ tak, by

$$c_{0,s} = \max_{1 \leq j \leq n} c_{0,j},$$

a wtedy, jeśli wszystkie $y_{is} \leq 0$, $1 \leq i \leq m$, to zadanie jest nieograniczone; w przeciwnym razie wyznaczamy $r \in \{1, \dots, m\}$ tak, by

$$\frac{y_{r,n+1}}{y_{r,s}} = \min \left\{ \frac{y_{i,n+1}}{y_{i,s}} : y_{i,s} > 0 \right\}$$

i przekształcamy układ do nowej postaci bazowej:

r -tą współrzędną wektora x_{B_0} zastępujemy przez x_s .

macierz współczynników

wektor ograniczeń

wartość funkcji celu

współczynnik przy funkcji celu

Uwaga. Metoda sympleks dla zadania z kryterium minimalizacji

$$c^T x \rightarrow \min$$

$$Ax = b, \quad x \geq 0,$$

różni się od metody sympleks dla zadania z maksymalizacją następującymi elementami:

- kryterium stopu będzie warunek $c_0 \geq 0$,

- wybór $s \in \{1, \dots, n\}$ jest taki, że

$$c_{0,s} = \min_{1 \leq j \leq n} c_{0,j}.$$

METODA SYMPLEX

DLA ZADANIA W POSTACI STANDARDOWEJ

Przykład. Rozważmy zadanie

$$2x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 20, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Przekształcamy do postaci standardowej

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 20, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6. \end{cases}$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$\text{Mamy } c^T = [2, 1, 1, 0, 0, 0], \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 60 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

METODA SYMPLEX

DLA ZADANIA W POSTACI STANDARDOWEJ

Przykład. Rozważmy zadanie

$$2x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 20, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Przekształcamy do postaci standardowej

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 20, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6. \end{cases}$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

Mamy $c^T = [2, 1, 1, 0, 0, 0]$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 60 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$.

od razu mamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

\Leftarrow $x_4 = 60$
 $x_5 = 10$
 $x_6 = 20$

$\bar{x}_0 = [0, 0, 0, 60, 10, 20]$ \Leftarrow $x_1, x_2, x_3 = 0$

$$Ax = b$$

$$B = \{ \} \leftarrow \text{baza}$$

$$Ax = x_B + B^{-1} \cdot D \cdot x_D = B^{-1} \cdot b$$

↑
wektor
zmierzonych
bazy

↑
macierz bazowa
(\neq baza)

$$A = A_0 = x_{B_0} + D_0 \cdot x_{D_0} = b_0 \longrightarrow Y_0 = \left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array} \right]$$

Przykład cd.

Warunki zadania są w postaci bazowej względem bazy $B_0 = \{4, 5, 6\}$.
 Zatem $A_0 = A$, $b_0 = b$, rozwiązaniem bazowym jest dopuszczalne
 $x^0 = [0, 0, 0, 60, 10, 20]^T$. Obliczamy

$$c_0 = c - A_0^T c_{B_0} = [2, 1, 1, 0, 0, 0]^T, \quad z_0 = c^T x^0 = 0.$$

Kryterium stopu $c_0 \leq 0$ nie jest spełnione, x^0 nie jest optymalny.

Dane zapiszemy w macierzy $Y_0 = \left[\begin{array}{cccccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 20 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$.

Ponieważ $\max\{2, 1, 1, 0, 0, 0\} = 2$ i w pierwszej kolumnie są elementy dodatnie, więc $s = 1$, $x_s = x_1$ wchodzi do bazy. Badamy

$$\min \left\{ \frac{60}{3}, \frac{10}{1}, \frac{20}{1} \right\} = \frac{10}{1} \Rightarrow r = 2,$$

czyli zmienna x_5 wychodzi z bazy.

Sprawdzamy kryterium stopu: czy $c_0 \leq 0$?
 Jeśli tak - to x^0 jest rozwiązaniem optymalnym.
 Jeśli nie - to wybieramy $s \in \{1, \dots, n\}$ tak, by

$$c_{0,s} = \max_{1 \leq j \leq n} c_{0,j},$$

a wtedy, jeśli wszystkie $y_{i,s} \leq 0$, $1 \leq i \leq m$, to zadanie jest nieograniczone; w przeciwnym razie wyznaczamy $r \in \{1, \dots, m\}$ tak, by

$$\frac{y_{r,n+1}}{y_{r,s}} = \min \left\{ \frac{y_{i,n+1}}{y_{i,s}} : y_{i,s} > 0 \right\}$$

i przekształcamy układ do nowej postaci bazowej:
 r -tą współrzędną wektora x_{B_0} zastępujemy przez x_s .

$$A_1 = x_{B_1} + D_1 \cdot x_{D_1} = b_1 \rightarrow Y_1 =$$

$$Y_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline c_1^T & z_1 \end{array} \right]$$

Przykład cd.

Nowa baza to $B_1 = \{4, 1, 6\}$, nowa postać bazowa:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 4 & -5 & 1 & -3 & 0 & 30 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -1 & 1 & 10 \end{array} \right] = [A_1 | b_1],$$

$$x^1 = [10, 0, 0, 30, 0, 10]^T, c_1 = [0, 3, -3, 0, -2, 0]^T, z_1 = 20,$$

Kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny,

$$Y_1 = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 4 & -5 & 1 & -3 & 0 & 30 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -1 & 1 & 10 \\ \hline 0 & 3 & -3 & 0 & -2 & 0 & 20 \end{array} \right].$$

$\max\{0, 3, -3, 0, -2, 0\} = 3$ dla $s = 2$ czyli x_2 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{30}{4}, \frac{10}{2}\} = \frac{10}{2}$ dla $r = 3$, zatem x_6 wychodzi z bazy.

- ① od W_3 odejmujemy $3 \cdot W_2$
- ② od W_3 odejmujemy u_{31} razy W_1

Sprawdzamy kryterium stopu: czy $c_0 \leq 0$?
 Jeśli tak - to x^0 jest rozwiązaniem optymalnym.
 Jeśli nie - to wybieramy $s \in \{1, \dots, n\}$ tak, by

$$c_{0,s} = \max_{1 \leq j \leq n} c_{0,j},$$

a wtedy, jeśli wszystkie $y_{is} \leq 0$, $1 \leq i \leq m$, to zadanie jest nieograniczone; w przeciwnym razie wyznaczamy $r \in \{1, \dots, m\}$ tak, by

$$\frac{y_{r,n+1}}{y_{r,s}} = \min \left\{ \frac{y_{i,n+1}}{y_{i,s}} : y_{i,s} > 0 \right\}$$

i przekształcamy układ do nowej postaci bazowej:
 r -tą współrzędną wektora x_{B_1} zastępujemy przez x_s .

$$A_2 = x_{B_2} + D_2 \cdot x_{D_2} = b_2 \longrightarrow Y^2 = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & b_2 \\ \hline c_2^T & z_2 \end{array} \right]$$

Przykład cd.

Kolejna baza to $B_2 = \{4, 1, 2\}$, nowa postać bazowa:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 4 & -5 & 1 & -3 & 0 & 30 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -1 & 1 & 10 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 10 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 15 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & 5 \end{array} \right],$$

$$x^2 = [15, 5, 0, 10, 0, 0]^T, c_2 = [0, 0, 3/2, 0, -1/2, -3/2]^T, z_2 = 35,$$

Kryterium stopu nie zachodzi, x^2 nie jest optymalny,

$$Y_2 = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 10 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 15 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 3/2 & 0 & -1/2 & -3/2 & 35 \end{array} \right].$$

$\max\{0, 0, 3/2, 0, -1/2, -3/2\} = 3/2$ dla $s = 3$, x_3 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{10}{1}, \frac{15}{1/2}\} = \frac{10}{1}$ dla $r = 1$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

- ① w_3 dzielimy przez 2
- ② do w_2 dodajemy wszystkie w_3
- ③ od v_1 odejmujemy $4 \cdot w_3$
nowe

Sprawdzamy kryterium stopu: czy $c_0 \leq 0$?

Jeśli tak - to x^0 jest rozwiązaniem optymalnym.

Jeśli nie - to wybieramy $s \in \{1, \dots, n\}$ tak, by

$$c_{0,s} = \max_{1 \leq j \leq n} c_{0,j},$$

a wtedy, jeśli wszystkie $y_{is} \leq 0$, $1 \leq i \leq m$, to zadanie jest nieograniczone; w przeciwnym razie wyznaczamy $r \in \{1, \dots, m\}$ tak, by

$$\frac{y_{r,n+1}}{y_{r,s}} = \min \left\{ \frac{y_{i,n+1}}{y_{i,s}} : y_{i,s} > 0 \right\}$$

i przekształcamy układ do nowej postaci bazowej:
 r -tą współrzędną wektora x_{B_0} zastępujemy przez x_s .

Przykład cd.

Dla bazy $B_3 = \{3, 1, 2\}$ mamy:

$$Y_3 = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 3/2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & -2 & -5/2 & 20 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3/2 & 1 & 3/2 & 50 \end{array} \right].$$

$x^3 = [10, 20, 10, 0, 0, 0]^T,$

kryterium stopu nie zachodzi, x^3 nie jest optymalny,
 $\max\{0, 0, 0, -3/2, 1, 3/2\} = 3/2$ dla $s = 6$, x_6 wchodzi do bazy,
 $\min\{\frac{10}{3/2}\} = \frac{20}{3}$ dla $r = 2$, zatem x_1 wychodzi z bazy.

Dla bazy $B_4 = \{3, 6, 2\}$ mamy:

$$Y_4 = \left[\begin{array}{cccccc|c} 4/3 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 70/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 1 & 20/3 \\ 5/3 & 1 & 0 & 3/2 & -1/3 & 0 & 110/3 \\ \hline -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 60 \end{array} \right].$$

KONIEC ≤ 0

$$x^{opt} = x^4 = [0, 110/3, 70/3, 0, 0, 20/3]^T, \quad z_{max} = 60.$$

Sprawdzamy kryterium stopu: czy $c_0 \leq 0$?

Jeśli tak - to x^0 jest rozwiązaniem optymalnym.

Jeśli nie - to wybieramy $s \in \{1, \dots, n\}$ tak, by

$$c_{0,s} = \max_{1 \leq j \leq n} c_{0,j},$$

a wtedy, jeśli wszystkie $y_{is} \leq 0$, $1 \leq i \leq m$, to zadanie jest nieograniczone; w przeciwnym razie wyznaczamy $r \in \{1, \dots, m\}$ tak, by

$$\frac{y_{r,n+1}}{y_{r,s}} = \min \left\{ \frac{y_{i,n+1}}{y_{i,s}} : y_{i,s} > 0 \right\}$$

i przekształcamy układ do nowej postaci bazowej:
 r -tą współrzędną wektora x_{B_0} zastępujemy przez x_s .

(DWUFUZOWA) METODA SYMPLEKS

Przykład. Rozważmy zadanie

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Faza I:

Układ nie jest w postaci bazowej.

Wprowadzamy wektor tzw. zmiennych **sztucznych**

$$x_S = [x_4, x_5]^T$$

i rozwiązujemy pomocnicze zadanie (metodą sympleks)

$$x_4 + x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 12, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

liczymy macie'

$$\textcircled{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad x_k = 0, \quad \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

optymalne (≥ 0)

Można sprawdzać
każdą z podmianami B,
ale...

(DWUFUZOWA) METODA SYMPLEKS

Przykład. Rozważmy zadanie

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Faza I:

Układ nie jest w postaci bazowej.

Wprowadzamy wektor tzw. zmiennych **sztucznych**

$$x_s = [x_4, x_5]^T$$

i rozwiązujemy pomocnicze zadanie (metodą sympleks)

$$x_4 + x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 12, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

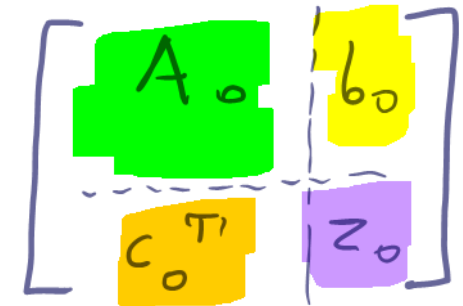
liczymy macie'

$$\textcircled{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad x_k = 0, \quad \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

optymalne (≥ 0)

Można sprawdzać
każdą z podmianami B,
ale...



Przykład cd.

Dla bazy $B_0 = \{4, 5\}$ mamy:

$$Y_0 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 12 \\ \hline -3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 19 \end{array} \right], \quad x^0 = [0, 0, 0, 7, 12]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^0 nie jest optymalny,

$\min\{-3, -5, -2, 0, 0\} = -5$ dla $s = 2$, x_2 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{7}{2}, \frac{12}{3}\} = \frac{7}{2}$ dla $r = 1$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

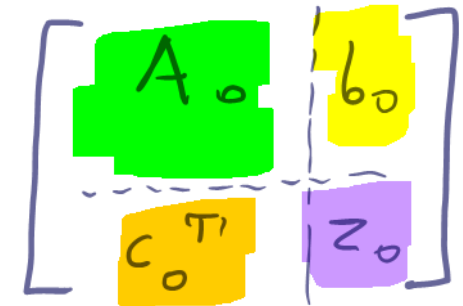
Dla bazy $B_1 = \{2, 5\}$ mamy:

$$Y_1 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 7/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & -3/2 & 1 & 3/2 \\ \hline -1/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & 3/2 \end{array} \right], \quad x^1 = [0, 7/2, 0, 0, 3/2]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny,

$\min\{-1/2, 0, 1/2, 3/2, 0\} = -1/2$ dla $s = 1$, x_1 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{7/2}{1/2}, \frac{3/2}{1/2}\} = \frac{3/2}{1/2}$ dla $r = 2$, zatem x_5 wychodzi z bazy.



Przykład cd.

Dla bazy $B_0 = \{4, 5\}$ mamy:

$$Y_0 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 12 \\ \hline -3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 19 \end{array} \right], \quad x^0 = [0, 0, 0, 7, 12]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^0 nie jest optymalny,

$\min\{-3, -5, -2, 0, 0\} = -5$ dla $s = 2$, x_2 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{7}{2}, \frac{12}{3}\} = \frac{7}{2}$ dla $r = 1$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

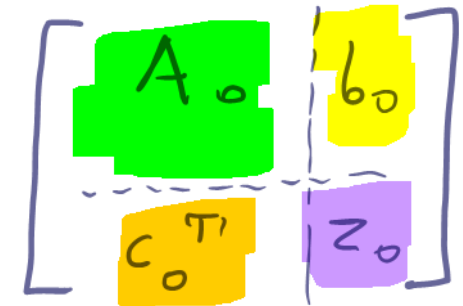
Dla bazy $B_1 = \{2, 5\}$ mamy:

$$Y_1 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 7/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & -3/2 & 1 & 3/2 \\ \hline -1/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & 3/2 \end{array} \right], \quad x^1 = [0, 7/2, 0, 0, 3/2]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny,

$\min\{-1/2, 0, 1/2, 3/2, 0\} = -1/2$ dla $s = 1$, x_1 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{7/2}{1/2}, \frac{3/2}{1/2}\} = \frac{3/2}{1/2}$ dla $r = 2$, zatem x_5 wychodzi z bazy.



Przykład cd.

Dla bazy $B_0 = \{4, 5\}$ mamy:

$$Y_0 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 12 \\ -3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 19 \end{array} \right], \quad x^0 = [0, 0, 0, 7, 12]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^0 nie jest optymalny,

$\min\{-3, -5, -2, 0, 0\} = -5$ dla $s = 2$, x_2 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{7}{2}, \frac{12}{3}\} = \frac{7}{2}$ dla $r = 1$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

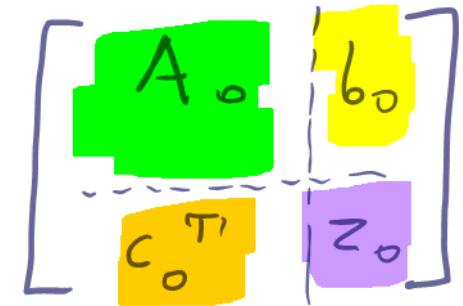
Dla bazy $B_1 = \{2, 5\}$ mamy:

$$Y_1 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 7/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & -3/2 & 1 & 3/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & 3/2 \end{array} \right], \quad x^1 = [0, 7/2, 0, 0, 3/2]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny,

$\min\{-1/2, 0, 1/2, 3/2, 0\} = -1/2$ dla $s = 1$, x_1 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{7/2}{1/2}, \frac{3/2}{1/2}\} = \frac{3/2}{1/2}$ dla $r = 2$, zatem x_5 wychodzi z bazy.



Przykład cd.

Dla bazy $B_0 = \{4, 5\}$ mamy:

$$Y_0 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 12 \\ -3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 19 \end{array} \right], \quad x^0 = [0, 0, 0, 7, 12]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^0 nie jest optymalny,

$\min\{-3, -5, -2, 0, 0\} = -5$ dla $s = 2$, x_2 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{7}{2}, \frac{12}{3}\} = \frac{7}{2}$ dla $r = 1$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

Dla bazy $B_1 = \{2, 5\}$ mamy:

$$Y_1 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 7/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & -3/2 & 1 & 3/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & 3/2 \end{array} \right], \quad x^1 = [0, 7/2, 0, 0, 3/2]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny,

$\min\{-1/2, 0, 1/2, 3/2, 0\} = -1/2$ dla $s = 1$, x_1 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{7/2}{1/2}, \frac{3/2}{1/2}\} = \frac{3/2}{1/2}$ dla $r = 2$, zatem x_5 wychodzi z bazy.

Przykład cd.

Dla bazy $B_0 = \{4, 5\}$ mamy:

$$Y_0 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 12 \\ \hline -3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 19 \end{array} \right], \quad x^0 = [0, 0, 0, 7, 12]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^0 nie jest optymalny,

$\min\{-3, -5, -2, 0, 0\} = -5$ dla $s = 2$, x_2 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{7}{2}, \frac{12}{3}\} = \frac{7}{2}$ dla $r = 1$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

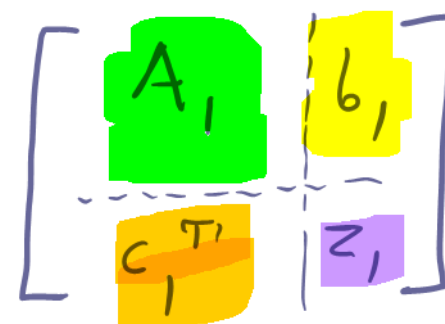
Dla bazy $B_1 = \{2, 5\}$ mamy:

$$Y_1 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 7/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & -3/2 & 1 & 3/2 \\ \hline -1/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & 3/2 \end{array} \right], \quad x^1 = [0, 7/2, 0, 0, 3/2]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny,

$\min\{-1/2, 0, 1/2, 3/2, 0\} = -1/2$ dla $s = 1$, x_1 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{7/2}{1/2}, \frac{3/2}{1/2}\} = \frac{3/2}{1/2}$ dla $r = 2$, zatem x_5 wychodzi z bazy.



Przykład cd.

Dla bazy $B_0 = \{4, 5\}$ mamy:

$$Y_0 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 12 \\ \hline -3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 19 \end{array} \right], \quad x^0 = [0, 0, 0, 7, 12]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^0 nie jest optymalny,

$\min\{-3, -5, -2, 0, 0\} = -5$ dla $s = 2$, x_2 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{7}{2}, \frac{12}{3}\} = \frac{7}{2}$ dla $r = 1$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

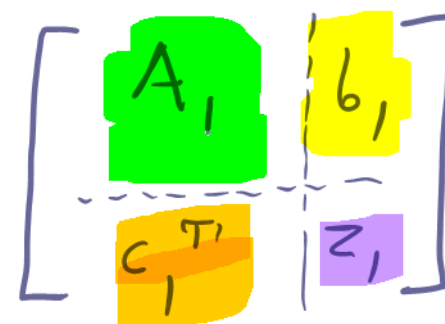
Dla bazy $B_1 = \{2, 5\}$ mamy:

$$Y_1 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 7/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & -3/2 & 1 & 3/2 \\ \hline -1/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & 3/2 \end{array} \right], \quad x^1 = [0, 7/2, 0, 0, 3/2]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny,

$\min\{-1/2, 0, 1/2, 3/2, 0\} = -1/2$ dla $s = 1$, x_1 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{7/2}{1/2}, \frac{3/2}{1/2}\} = \frac{3/2}{1/2}$ dla $r = 2$, zatem x_5 wychodzi z bazy.



Przykład cd.

Dla bazy $B_0 = \{4, 5\}$ mamy:

$$Y_0 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 12 \\ \hline -3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 19 \end{array} \right], \quad x^0 = [0, 0, 0, 7, 12]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^0 nie jest optymalny,

$\min\{-3, -5, -2, 0, 0\} = -5$ dla $s = 2$, x_2 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{7}{2}, \frac{12}{3}\} = \frac{7}{2}$ dla $r = 1$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

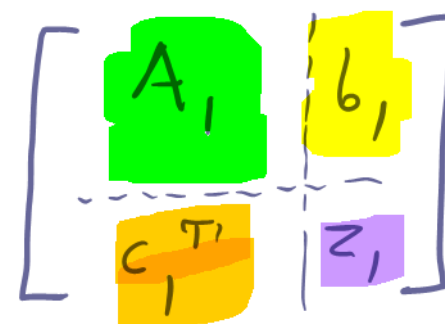
Dla bazy $B_1 = \{2, 5\}$ mamy:

$$Y_1 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 7/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & -3/2 & 1 & 3/2 \\ \hline -1/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & 3/2 \end{array} \right], \quad x^1 = [0, 7/2, 0, 0, 3/2]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny,

$\min\{-1/2, 0, 1/2, 3/2, 0\} = -1/2$ dla $s = 1$, x_1 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{7/2}{1/2}, \frac{3/2}{1/2}\} = \frac{3/2}{1/2}$ dla $r = 2$, zatem x_5 wychodzi z bazy.



Przykład cd.

Dla bazy $B_0 = \{4, 5\}$ mamy:

$$Y_0 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 12 \\ \hline -3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 19 \end{array} \right], \quad x^0 = [0, 0, 0, 7, 12]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^0 nie jest optymalny,

$\min\{-3, -5, -2, 0, 0\} = -5$ dla $s = 2$, x_2 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{7}{2}, \frac{12}{3}\} = \frac{7}{2}$ dla $r = 1$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

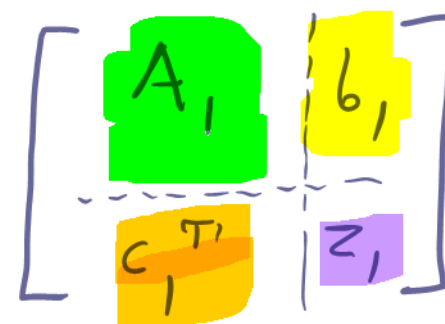
Dla bazy $B_1 = \{2, 5\}$ mamy:

$$Y_1 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 7/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & -3/2 & 1 & 3/2 \\ \hline -1/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & 3/2 \end{array} \right], \quad x^1 = [0, 7/2, 0, 0, 3/2]^T,$$

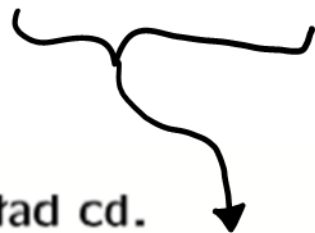
kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny,

$\min\{-1/2, 0, 1/2, 3/2, 0\} = -1/2$ dla $s = 1$, x_1 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{7/2}{1/2}, \frac{3/2}{1/2}\} = \frac{3/2}{1/2}$ dla $r = 2$, zatem x_5 wychodzi z bazy.



$$B_1 = \{2, 5\} \quad x_1 \leftrightarrow x_5$$



Przykład cd.

Dla bazy $B_2 = \{2, 1\}$ mamy: $Y_2 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$,

$$x^{opt} = x^2 = [3, 2, 0, 0, 0]^T.$$

Wektor $\bar{x} = [3, 2, 0]^T$ jest (BRD) zadania wyjściowego, a z Y_2 odczytujemy postać bazową tego zadania - po odrzuceniu zmiennych sztucznych.

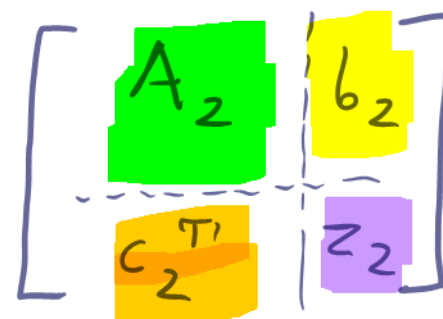
Faza II: $2x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$

$$B_0 = \{2, 1\}, \quad Y_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{array} \right], \quad x^0 = [3, 2, 0]^T.$$

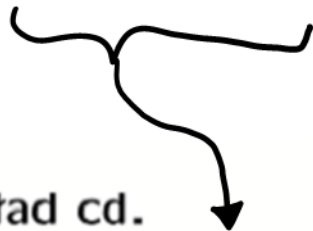
$\min\{0, 0, -1\} = -1$ dla $s = 3$, x_3 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{2}{1}\} = \frac{2}{1}$ dla $r = 1$, zatem x_2 wychodzi z bazy.

$$B_1 = \{3, 1\}, \quad Y_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{array} \right], \quad x^{opt} = x^1 = [5, 0, 2]^T, \quad z_{min} = 6.$$



$$B_1 = \{2, 5\} \quad x_1 \leftrightarrow x_5$$



Przykład cd.

Dla bazy $B_2 = \{2, 1\}$ mamy:

$$Y_2 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right],$$

$$x^{opt} = x^2 = [3, 2, 0, 0, 0]^T.$$

Wektor $\bar{x} = [3, 2, 0]^T$ jest (BRD) zadania wyjściowego, a z Y_2 odczytujemy postać bazową tego zadania - po odrzuceniu zmiennych sztucznych.

Faza II: $2x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$

$$B_0 = \{2, 1\}, \quad Y_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{array} \right], \quad x^0 = [3, 2, 0]^T.$$

$\min\{0, 0, -1\} = -1$ dla $s = 3$, x_3 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{2}{1}\} = \frac{2}{1}$ dla $r = 1$, zatem x_2 wychodzi z bazy.

$$B_1 = \{3, 1\}, \quad Y_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{array} \right], \quad x^{opt} = x^1 = [5, 0, 2]^T, \quad z_{min} = 6.$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_2 & b_2 \\ \hline c_2^T & z_2 \end{array} \right]$$

!

baza $B_2 = \{2, 1\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

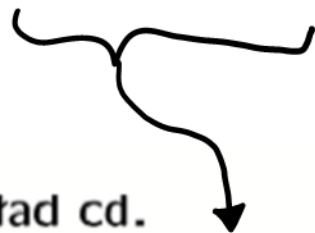
all $x_3 = x_4 = x_5 = 0$

otymujemy $x_1 = 3$

oraz $x_2 = 2$

!

$$B_1 = \{2, 5\} \quad x_1 \leftrightarrow x_5$$



Przykład cd.

Dla bazy $B_2 = \{2, 1\}$ mamy: $Y_2 = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 0 \end{array}$,

$$x^{opt} = x^2 = [3, 2, 0, 0, 0]^T.$$

Wektor $\bar{x} = [3, 2, 0]^T$ jest (BRD) zadania wyjściowego, a z Y_2 odczytujemy postać bazową tego zadania - po odrzuceniu zmiennych sztucznych.

Faza II: $2x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$

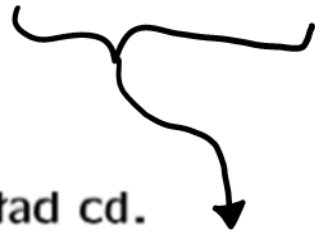
$$B_0 = \{2, 1\}, \quad Y_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 8 \end{array} \right], \quad x^0 = [3, 2, 0]^T.$$

$\min\{0, 0, -1\} = -1$ dla $s = 3$, x_3 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{2}{1}\} = \frac{2}{1}$ dla $r = 1$, zatem x_2 wychodzi z bazy.

$$B_1 = \{3, 1\}, \quad Y_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 6 \end{array} \right], \quad x^{opt} = x^1 = [5, 0, 2]^T, \quad z_{min} = 6.$$

$$B_1 = \{2, 5\} \quad x_1 \leftrightarrow x_5$$



Przykład cd.

Dla bazy $B_2 = \{2, 1\}$ mamy: $Y_2 = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$,

• $x^{opt} = x^2 = [3, 2, 0, 0, 0]^T$.

Wektor $\bar{x} = [3, 2, 0]^T$ jest (BRD) zadania wyjściowego, a z Y_2 odczytujemy postać bazową tego zadania - po odrzuceniu zmiennych sztucznych.

Faza II: $2x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \min, \geq 0$

$B_0 = \{2, 1\}$, $Y_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{array} \right]$, $x^0 = [3, 2, 0]^T$.

$\min\{0, 0, -1\} = -1$ dla $s = 3$, x_3 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{2}{1}\} = \frac{2}{1}$ dla $r = 1$, zatem x_2 wychodzi z bazy.

$B_1 = \{3, 1\}$, $Y_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 6 \end{array} \right]$, $x^{opt} = x^1 = [5, 0, 2]^T$, $z_{min} = 6$.

Przykład cd.

Dla bazy $B_2 = \{2, 1\}$ mamy: $Y_2 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$,

$$x^{opt} = x^2 = [3, 2, 0, 0, 0]^T.$$

Wektor $\bar{x} = [3, 2, 0]^T$ jest (BRD) zadania wyjściowego, a z Y_2 odczytujemy postać bazową tego zadania - po odrzuceniu zmiennych sztucznych.

Faza II: $2x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$

$$B_0 = \{2, 1\}, Y_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 8 \end{array} \right], x^0 = [3, 2, 0]^T.$$

$\min\{0, 0, -1\} = -1$ dla $s = 3$, x_3 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{2}{1}\} = \frac{2}{1}$ dla $r = 1$, zatem x_2 wychodzi z bazy.

$$B_1 = \{3, 1\}, Y_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 6 \end{array} \right], x^{opt} = x^1 = [5, 0, 2]^T, z_{min} = 6.$$

$\geq 0 \rightarrow \text{STOP}$

KONIEC

baza $B_1 = \{3, 1\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 5$
 $x_3 = 2$
 $x_2 = 0$

DWUFAZOWA METODA SYMPLEKS

Dla zagadnienia

$$c^T x \rightarrow \max (\min)$$

$$Ax = b, \quad x \geq 0,$$

gdzie $c \in R^n$, $b \in R^m$, $b \geq 0$, $A \in M_{m \times n}$, $\text{rz } A = m$, które nie jest w postaci bazowej, tworzymy zadanie pomocnicze (Faza I)

$$1x_s \rightarrow \min$$

$$Ax + 1x_s = b, \quad x, x_s \geq 0, \quad 1 = [1, \dots, 1] \in R^m,$$

gdzie x_s jest wektorem zmiennych sztucznych.

Uwaga. Zagadnienie Fazy I ma zawsze rozwiązanie - jest niesprzeczne (wektor $[0, b]^T$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym) i funkcja celu jest ograniczona z dołu.

(DWUFAZOWA) METODA SYMPLEKS

(przypomnienie)

Przykład. Rozważmy zadanie

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Faza I:

Układ nie jest w postaci bazowej.

Wprowadzamy wektor tzw. zmiennych sztucznych

$$x_S = [x_4, x_5]^T$$

i rozwiązujemy pomocnicze zadanie (metodą sympleks)

$$x_4 + x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 12, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

$$B_0 = \{4, 5\}$$

oblicz

• • • $\bar{x}^{opt} = [3, 2, 0, 0, 0]$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{=0} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{x_S}$

$[x_1, x_2, x_3]$

\bar{x}

dobry start dla algorytmu

DWUFAZOWA METODA SYMPLEKS cd.

Zagadnienie Fazy I jest w postaci bazowej - można zastosować do niego metodę sympleks.

Twierdzenie 1. Jeśli $[\bar{x}, \bar{x}_S]^T$ jest rozwiązaniem optymalnym zagadnienia Fazy I, to

$\bar{x}_S \neq 0 \Leftrightarrow$ wyjściowe zadanie jest sprzeczne.

Twierdzenie 2. Jeśli $[\bar{x}, \bar{x}_S]^T$ jest rozwiązaniem optymalnym zagadnienia Fazy I i $\bar{x}_S = 0$, to \bar{x} jest bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym (BRD) wyjściowego zadania.

Wniosek. W oparciu o (BRD) uzyskane w Fazy I, można metodą sympleks rozwiązać wyjściowy problem (Faza II).

Zauważmy, że może być wiele możliwych zmiennych wychodzących — ma to miejsce, gdy w wielu równaniach iloraz wyrazu wolnego i współczynnika przy zmiennej wchodzącej jest taki sam. Może to prowadzić do „zapętlenia” algorytmu. Zapętlenie się algorytmu Simplex jest równoważne powrotowi do tej samej bazy.

$$\begin{aligned} & \text{zmaksymalizować } 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 \\ \text{przy zachowaniu warunków: } & x_1 - 11x_2 - 5x_3 + 18x_4 \leq 0 \\ & x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 0 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Twierdzenie [Reguła Blanda] (1977)

Jeśli podczas wymiany bazy (1) spośród możliwych zmiennych wchodzących wybierana jest zmienna o najmniejszym indeksie oraz (2) spośród możliwych zmiennych wychodzących wybierana jest zmienna o najmniejszym indeksie, to algorytm Simplex kończy swoje działanie.

Ponieważ dla programu o m zmiennych niebazowych i n zmiennych bazowych mamy $O\left(\binom{n+m}{n}\right)$ możliwych baz, więc algorytm Simplex z regułą Blanda wykonuje $O\left(\binom{n+m}{n}\right)$ operacji wymiany bazy (przy każdej z nich wykonuje się $O(nm)$ operacji arytmetycznych). Z drugiej strony, odnotujmy, że istnieją przykłady programów liniowych, dla których algorytm Simplex działa w czasie $\Omega(2^n)$.

Przykład KLEE-MINTY (ang. Klee-Minty cube/polytope, 1972)

zmaksymalizować $2^{n-1}x_1 + 2^{n-2}x_2 + \dots + 2x_{n-1} + x_n$

$$\begin{array}{rcl} \text{przy zachowaniu warunków} & x_1 & \leq 5 \\ & 4x_1 + x_2 & \leq 25 \\ & 8x_1 + 4x_2 + x_3 & \leq 125 \\ & \dots & \dots \dots \\ & 2^n x_1 + 2^{n-1} x_2 + \dots + 4x_{n-1} + x_n & \leq 5^n \\ & x_1, x_2, \dots, x_n & \geq 0 \end{array}$$

- ▶ Powyższe PL ma n zmiennych, n ograniczeń nieelementarnych i n ograniczeń elementarnych.
- ▶ Jego obszar dopuszczalny posiada 2^n wierzchołków (tyle, ile n -wymiarowa hiperkostka)
- ▶ Jeśli pierwszym rozwiązaniem bazowym dla algorytmu Simplex będzie $\bar{x} = [0, 0, \dots]^T$, wówczas algorytm Simplex sprawdzi wszystkie 2^n wierzchołków obszaru dopuszczalnego, osiągając optymalne rozwiązanie dla $\bar{x} = [0, 0, \dots, 5^n]^T$.

DUALIZM W PROGRAMOWANIU LINIOWYM

(knotko)

Niech dane będą macierz $A_{m \times n}$ oraz wektory $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$.

Zadanie pierwotne (ZP):

$$c^T x \rightarrow \max,$$

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0,$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad \begin{array}{l} \leftarrow m \text{ ograniczeń elementarnych} \\ \leftarrow n \text{ zmiennych} \end{array}$$

Zadanie dualne (ZD):

$$b^T y \rightarrow \min,$$

$$A^T y \geq c, \quad y \geq 0,$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}. \quad \begin{array}{l} \leftarrow m \text{ zmiennych} \\ \leftarrow n \text{ ograniczeń nielinearnych} \end{array}$$

Przykład.

$$(ZP) \quad 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(ZD) \quad 14y_1 + 8y_2 + 16y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

KOMPLEMENTARNOŚĆ (ZP) I (ZD)

Twierdzenie.

(a) Jeśli wektory x, y są dopuszczalne dla zadania pierwotnego (ZP) i dualnego (ZD) odpowiednio, to

$$c^T x \leq y^T b.$$

(b) Jeśli wektory x, y są optymalne dla zadania pierwotnego (ZP) i dualnego (ZD) odpowiednio, to

$$y^T (b - Ax) = 0, \quad (y^T A - c^T)x = 0.$$

(c) Jeśli wektory x, y są optymalne dla zadania pierwotnego (ZP) i dualnego (ZD) odpowiednio, to

$$c^T x = y^T b.$$

Uwaga. Implikacje w (b) i (c) można odwrócić przy dodatkowym założeniu, że x, y są dopuszczalne dla zadania (ZP) i (ZD) odpowiednio:

(1) Jeśli x, y są dopuszczalne dla zadania (ZP) i (ZD) odpowiednio, $y^T (b - Ax) = 0$ oraz $(y^T A - c^T)x = 0$, to x, y są optymalne dla zadania (ZP) i (ZD) odpowiednio.

(2) Jeśli x, y są dopuszczalne dla zadania (ZP) i (ZD) odpowiednio oraz $c^T x = y^T b$, to x, y są optymalne dla zadania (ZP) i (ZD) odpowiednio.

