METODA SYMPLEKS *

standardowa postać PL

Rozważamy zadanie programowania liniowego

$$c^T x \;\rightarrow\; \max$$

$$Ax = b, \quad x \geq 0,$$

gdzie

$$c^T = [c_1, \ldots, c_n], \;\; x = [x_1, \ldots, x_n]^T, \;\; A = [a_{ij}]_{m \times n}, \;\; b = [b_1, \ldots, b_m]^T.$$

Układ $Ax = b$ przedstawiamy w postaci bazowej

$$I x_{B_0} + B_0^{-1} D x_{D_0} = B_0^{-1} b$$

z macierzą bazową B_0. Równoważnie

$$A_0 := B_0^{-1} A, \quad b_0 := B_0^{-1} b \quad \Rightarrow \quad A_0 x = b_0.$$

Niech x^0 będzie dopuszczalnym rozwiązaniem bazowym, $x^0_{B_0}$ to jego zmienne bazowe, $x^0_{D_0}$ to zmienne dopełniające, $x^0_{D_0} = 0$.

* wariant z założeniem, że x^0 jest dopuszczalne

(slajdy: dr Danuta Jaruszewska-Walczak)

macierz współczynników

wektor ograniczeń

METODA SYMPLEKS cd.

Obliczamy $c_0 = c - A_0^T c_{B_0}$, $z_0 = c^T x^0$ oraz tworzymy

$$Y_0 = [y_{ij}]_{(m+1)\times(n+1)} \quad Y_0 = \left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right].$$

wartość funkcji celu

współczynniki przy funkcji celu

Sprawdzamy **kryterium stopu**: $\boxed{\text{czy } c_0 \leq 0?}$
Jeśli tak - to x^0 jest rozwiązaniem optymalnym.
Jeśli nie - to wybieramy $s \in \{1, \ldots, n\}$ tak, by

$$c_{o,s} = \max_{1 \leq j \leq n} c_{o,j},$$

a wtedy, jeśli wszystkie $y_{is} \leq 0,\ 1 \leq i \leq m$,, to zadanie jest nieograniczone; w przeciwnym razie wyznaczamy $r \in \{1, \ldots, m\}$ tak, by

$$\frac{y_{r,n+1}}{y_{r,s}} = \min\left\{\frac{y_{i,n+1}}{y_{i,s}} : \ y_{i,s} > 0\right\}$$

i przekształcamy układ do nowej postaci bazowej:
r-tą współrzędną wektora x_{B_0} zastępujemy przez x_s.

Uwaga. Metoda sympleks dla zadania z kryterium minimalizacji

$$c^T x \rightarrow \min$$

$$Ax = b, \quad x \geq 0,$$

różni się od metody sympleks dla zadania z maksymalizacją następującymi elementami:

- kryterium stopu będzie warunek $\boxed{c_0 \geq 0}$,

- wybór $s \in \{1, \ldots, n\}$ jest taki, że

$$c_{o,s} = \boxed{\min_{1 \leq j \leq n}} c_{o,j}.$$

METODA SYMPLEX
DLA ZADANIA W POSTACI STANDARDOWEJ

Przykład. Rozważymy zadanie

$$2x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 & \leq 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & \leq 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 & \leq 20, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Przekształcamy do postaci standardowej

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 & = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_6 & = 20, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 6. \end{cases}$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$

Mamy $c^T = [2, 1, 1, 0, 0, 0]$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 60 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$.

METODA SYMPLEX
DLA ZADANIA W POSTACI STANDARDOWEJ

$$Ax = b$$

$$B = \{ \quad \} \leftarrow \text{baza}$$

$$Ax = x_B + B^{-1} \cdot D \cdot x_D = B^{-1} \cdot b$$

wektor zmiennych bazowych

macierz bazowa ($\neq$ baza)

Przykład. Rozważymy zadanie

$$2x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 & \leq 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & \leq 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 & \leq 20, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Przekształcamy do postaci standardowej

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 & = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_6 & = 20, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 6. \end{cases}$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$

Mamy $c^T = [2, 1, 1, 0, 0, 0]$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 60 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$.

od razu mamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$\bar{x}_0 = [0, 0, 0, 60, 10, 20] \Leftarrow x_4 = 60,\ x_5 = 10,\ x_6 = 20 \Longleftarrow x_1, x_2, x_3 = 0$

$$A = A_0 = x_{B_0} + D_0 \cdot x_{D_0} = b_0 \longrightarrow Y^0 = \left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right]$$

Przykład cd.

Warunki zadania są w postaci bazowej względem bazy $\mathcal{B}_0 = \{4, 5, 6\}$. Zatem $A_0 = A$, $b_0 = b$, rozwiązaniem bazowym jest dopuszczalne $x^0 = [0, 0, 0, 60, 10, 20]^T$. Obliczamy

$$c_0 = c - A_0^T c_{B_0} = [2, 1, 1, 0, 0, 0]^T, \quad z_0 = c^T x^0 = 0.$$

Kryterium stopu $c_0 \le 0$ nie jest spełnione, x^0 nie jest optymalny.

Dane zapiszemy w macierzy $Y_0 = \left[\begin{array}{cccccc|c} \boxed{3} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ \boxed{1} & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 20 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Ponieważ $\max\{2, 1, 1, 0, 0, 0\} = 2$ i w pierwszej kolumnie są elementy dodatnie, więc $s = 1$, $x_s = x_1$ wchodzi do bazy. Badamy

$$\min\left\{\frac{60}{3}, \frac{10}{1}, \frac{20}{1}\right\} = \frac{10}{1} \quad \Rightarrow \quad r = 2,$$

czyli zmienna x_5 wychodzi z bazy.

Sprawdzamy **kryterium stopu**: $\boxed{\text{czy } c_0 \le 0?}$
Jeśli tak - to x^0 jest rozwiązaniem optymalnym.
Jeśli nie - to wybieramy $s \in \{1, \ldots, n\}$ tak, by

$$c_{o,s} = \max_{1 \le j \le n} c_{o,j},$$

a wtedy, jeśli wszystkie $y_{is} \le 0$, $1 \le i \le m$,, to zadanie jest nieograniczone; w przeciwnym razie wyznaczamy $r \in \{1, \ldots, m\}$ tak, by

$$\frac{y_{r,n+1}}{y_{r,s}} = \min\left\{\frac{y_{i,n+1}}{y_{i,s}} : \ y_{i,s} > 0\right\}$$

i przekształcamy układ do nowej postaci bazowej:
r-tą współrzędną wektora x_{B_0} zastępujemy przez x_s.

(slajdy: dr Danuta Jaruszewska-Walczak)

$$A_1 = x_{B_1} + D_1 \cdot x_{D_1} = b_1 \longrightarrow \quad Y_1' = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline c_1^T & z_1 \end{array}\right]$$

Przykład cd.

Nowa baza to $\mathcal{B}_1 = \{4, 1, 6\}$, nowa postać bazowa:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 4 & -5 & 1 & -3 & 0 & 30 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -1 & 1 & 10 \end{array}\right] = [A_1 \mid b_1],$$

$$x^1 = [10, 0, 0, 30, 0, 10]^T, \quad c_1 = [0, 3, -3, 0, -2, 0]^T, \quad z_1 = 20,$$

① od W_3 odejmujemy $3 \cdot W_2$

② od W_3 odejmujemy wiersz drugi

Kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny.

$$Y_1 = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & \boxed{4} & -5 & 1 & -3 & 0 & 30 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -1 & 1 & 10 \\ \hline 0 & 3 & -3 & 0 & -2 & 0 & 20 \end{array}\right].$$

$\max\{0, 3, -3, 0, -2, 0\} = 3$ dla $s = 2$ czyli x_2 wchodzi do bazy,
$\min\{\frac{30}{4}, \frac{10}{2}\} = \frac{10}{2}$ dla $r = 3$, zatem x_6 wychodzi z bazy.

Sprawdzamy **kryterium stopu**: $\boxed{\text{czy } c_0 \leq 0?}$
Jeśli tak - to x^0 jest rozwiązaniem optymalnym.
Jeśli nie - to wybieramy $s \in \{1, \ldots, n\}$ tak, by

$$c_{o,s} = \max_{1 \leq j \leq n} c_{o,j},$$

a wtedy, jeśli wszystkie $y_{is} \leq 0$, $1 \leq i \leq m$,, to zadanie jest nieograniczone; w przeciwnym razie wyznaczamy $r \in \{1, \ldots, m\}$ tak, by

$$\frac{y_{r,n+1}}{y_{r,s}} = \min\left\{\frac{y_{i,n+1}}{y_{i,s}} : \; y_{i,s} > 0\right\}$$

i przekształcamy układ do nowej postaci bazowej:
r-tą współrzędną wektora x_{B_0} zastępujemy przez x_s.

(slajdy: dr Danuta Jaruszewska-Walczak)

$$A_2 = x_{B_2} + D_2 \cdot x_{D_2} = b_2 \longrightarrow Y^2 = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & b_2 \\ \hline c_2^T & z_2 \end{array}\right]$$

Przykład cd.

Kolejna baza to $\mathcal{B}_2 = \{4, 1, 2\}$, nowa postać bazowa:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 4 & -5 & 1 & -3 & 0 & 30 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -1 & 1 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 10 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 15 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & 5 \end{array}\right],$$

$$x^2 = [15, 5, 0, 10, 0, 0]^T, \quad c_2 = [0, 0, 3/2, 0, -1/2, -3/2]^T, \quad z_2 = 35,$$

Kryterium stopu nie zachodzi, x^2 nie jest optymalny.

$$Y_2 = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 10 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 15 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 3/2 & 0 & -1/2 & -3/2 & 35 \end{array}\right].$$

$\max\{0, 0, 3/2, 0, -1/2, -3/2\} = 3/2$ dla $s = 3$, x_3 wchodzi do bazy.
$\min\{\frac{10}{1}, \frac{15}{1/2}\} = \frac{10}{1}$ dla $r = 1$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

① w_3 dzielimy przez 2
② do w_2 dodajemy nowy w_3
③ od w_1 odejmujemy $\underbrace{4 \cdot w_3}_{\text{nowe}}$

Sprawdzamy **kryterium stopu**: $\boxed{\text{czy } c_0 \leq 0?}$
Jeśli tak - to x^0 jest rozwiązaniem optymalnym.
Jeśli nie - to wybieramy $s \in \{1, \ldots, n\}$ tak, by

$$c_{o,s} = \max_{1 \leq j \leq n} c_{o,j},$$

a wtedy, jeśli wszystkie $y_{is} \leq 0$, $1 \leq i \leq m$,, to zadanie jest nieograniczone; w przeciwnym razie wyznaczamy $r \in \{1, \ldots, m\}$ tak, by

$$\frac{y_{r,n+1}}{y_{r,s}} = \min\left\{\frac{y_{i,n+1}}{y_{i,s}} : y_{i,s} > 0\right\}$$

i przekształcamy układ do nowej postaci bazowej:
r-tą współrzędną wektora x_{B_0} zastępujemy przez x_s.

Sprawdzamy **kryterium stopu**: $\boxed{\text{czy } c_0 \le 0?}$
Jeśli tak - to x^0 jest rozwiązaniem optymalnym.
Jeśli nie - to wybieramy $s \in \{1, \dots, n\}$ tak, by

$$c_{o,s} = \max_{1 \le j \le n} c_{o,j},$$

a wtedy, jeśli wszystkie $y_{is} \le 0$, $1 \le i \le m$,, to zadanie jest nieograniczone; w przeciwnym razie wyznaczamy $r \in \{1, \dots, m\}$ tak, by

$$\frac{y_{r,n+1}}{y_{r,s}} = \min \left\{ \frac{y_{i,n+1}}{y_{i,s}} : \ y_{i,s} > 0 \right\}$$

i przekształcamy układ do nowej postaci bazowej:
r-tą współrzędną wektora x_{B_n} zastępujemy przez x_s.

Przykład cd.
Dla bazy $\mathcal{B}_3 = \{3, 1, 2\}$ mamy:

$$Y_3 = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 3/2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & -2 & -5/2 & 20 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3/2 & 1 & 3/2 & 50 \end{array} \right].$$

$$x^3 = [10, 20, 10, 0, 0, 0]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^3 nie jest optymalny,
$\max\{0, 0, 0, -3/2, 1, 3/2\} = 3/2$ dla $s = 6$, x_6 wchodzi do bazy,
$\min\{\frac{10}{3/2}\} = \frac{20}{3}$ dla $r = 2$, zatem x_1 wychodzi z bazy.

Dla bazy $\mathcal{B}_4 = \{3, 6, 2\}$ mamy:

$$Y_4 = \left[\begin{array}{cccccc|c} 4/3 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 70/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 1 & 20/3 \\ 5/3 & 1 & 0 & 3/2 & -1/3 & 0 & 110/3 \\ \hline -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 60 \end{array} \right].$$

KONIEC ≤ 0

$$x^{opt} = x^4 = [0, 110/3, 70/3, 0, 0, 20/3]^T, \quad z_{max} = 60.$$

(DWUFAZOWA) METODA SYMPLEKS

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Przykład. Rozważymy zadanie

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 \;\to\; \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

$\boxed{\text{Faza I:}}$

Układ nie jest w postaci bazowej.
Wprowadzamy wektor tzw. zmiennych **sztucznych**

$$x_S = [x_4, x_5]^T$$

i rozwiązujemy pomocnicze zadanie (metodą sympleks)

$$x_4 + x_5 \;\to\; \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 12, \quad x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

chcemy mieć

1. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}$$

2. $$\underbrace{x_k = 0, \quad \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}}_{\text{dopuszczalne } (\geq 0)}$$

Można sprawdzać każdą z podmacierzy B, ale...

(DWUFAZOWA) METODA SYMPLEKS

Przykład. Rozważymy zadanie

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 \ \rightarrow \ \text{min}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

$\boxed{\text{Faza I:}}$

Układ nie jest w postaci bazowej.
Wprowadzamy wektor tzw. zmiennych **sztucznych**

$$x_S = [x_4, x_5]^T$$

i rozwiązujemy pomocnicze zadanie (metodą sympleks)

$$x_4 + x_5 \ \rightarrow \ \text{min}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 12, \quad x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

chcemy mieć

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$

2. $\underbrace{x_k = 0, \quad \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}}_{\text{dopuszczalne } (\geq 0)}$

Można sprawdzać każdą z podmacierzy B, ale...

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right]$$

Przykład cd.

Dla bazy $\mathcal{B}_0 = \{4, 5\}$ mamy:

$$Y_0 = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 12 \\ \hline -3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 19 \end{array}\right], \quad x^0 = [0, 0, 0, 7, 12]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^0 nie jest optymalny,
$\min\{-3, -5, -2, 0, 0\} = -5$ dla $s = 2$, x_2 wchodzi do bazy,
$\min\{\frac{7}{2}, \frac{12}{3}\} = \frac{7}{2}$ dla $r = 1$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

Dla bazy $\mathcal{B}_1 = \{2, 5\}$ mamy:

$$Y_1 = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 7/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & -3/2 & 1 & 3/2 \\ \hline -1/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & 3/2 \end{array}\right], \quad x^1 = [0, 7/2, 0, 0, 3/2]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny,
$\min\{-1/2, 0, 1/2, 3/2, 0\} = -1/2$ dla $s = 1$, x_1 wchodzi do bazy,
$\min\{\frac{7/2}{1/2}, \frac{3/2}{1/2}\} = \frac{3/2}{1/2}$ dla $r = 2$, zatem x_5 wychodzi z bazy.

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right]$$

Przykład cd.

Dla bazy $\mathcal{B}_0 = \{4, 5\}$ mamy:

$$Y_0 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & \boxed{3} & 1 & 0 & 1 & 12 \\ \hline -3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 19 \end{array}\right], \quad x^0 = [0, 0, 0, 7, 12]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^0 nie jest optymalny,
$\min\{-3, -5, -2, 0, 0\} = -5$ dla $s = 2$, x_2 wchodzi do bazy,
$\min\{\frac{7}{2}, \frac{12}{3}\} = \frac{7}{2}$ dla $r = 1$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

Dla bazy $\mathcal{B}_1 = \{2, 5\}$ mamy:

$$Y_1 = \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1/2} & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 7/2 \\ \boxed{1/2} & 0 & -1/2 & -3/2 & 1 & 3/2 \\ \hline -1/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & 3/2 \end{array}\right], \quad x^1 = [0, 7/2, 0, 0, 3/2]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny,
$\min\{-1/2, 0, 1/2, 3/2, 0\} = -1/2$ dla $s = 1$, x_1 wchodzi do bazy,
$\min\{\frac{7/2}{1/2}, \frac{3/2}{1/2}\} = \frac{3/2}{1/2}$ dla $r = 2$, zatem x_5 wychodzi z bazy.

(slajdy: dr Danuta Jaruszewska-Walczak)

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right]$$

Przykład cd.

Dla bazy $\mathcal{B}_0 = \{4, 5\}$ mamy:

$$Y_0 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 12 \\ \hline -3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 19 \end{array}\right], \quad x^0 = [0, 0, 0, 7, 12]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^0 nie jest optymalny,
$\min\{-3, -5, -2, 0, 0\} = -5$ dla $s = 2$, x_2 wchodzi do bazy,
$\min\{\frac{7}{2}, \frac{12}{3}\} = \frac{7}{2}$ dla $r = 1$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

Dla bazy $\mathcal{B}_1 = \{2, 5\}$ mamy:

$$Y_1 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 7/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & -3/2 & 1 & 3/2 \\ \hline -1/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & 3/2 \end{array}\right], \quad x^1 = [0, 7/2, 0, 0, 3/2]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny,
$\min\{-1/2, 0, 1/2, 3/2, 0\} = -1/2$ dla $s = 1$, x_1 wchodzi do bazy,
$\min\{\frac{7/2}{1/2}, \frac{3/2}{1/2}\} = \frac{3/2}{1/2}$ dla $r = 2$, zatem x_5 wychodzi z bazy.

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right]$$

Przykład cd.

Dla bazy $\mathcal{B}_0 = \{4, 5\}$ mamy:

$$Y_0 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 12 \\ \hline -3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 19 \end{array}\right], \quad x^0 = [0, 0, 0, 7, 12]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^0 nie jest optymalny,
$\min\{-3, -5, -2, 0, 0\} = -5$ dla $s = 2$, x_2 wchodzi do bazy.
$\min\{\frac{7}{2}, \frac{12}{3}\} = \frac{7}{2}$ dla $r = 1$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

Dla bazy $\mathcal{B}_1 = \{2, 5\}$ mamy:

$$Y_1 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 7/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & -3/2 & 1 & 3/2 \\ \hline -1/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & 3/2 \end{array}\right], \quad x^1 = [0, 7/2, 0, 0, 3/2]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny,
$\min\{-1/2, 0, 1/2, 3/2, 0\} = -1/2$ dla $s = 1$, x_1 wchodzi do bazy.
$\min\{\frac{7/2}{1/2}, \frac{3/2}{1/2}\} = \frac{3/2}{1/2}$ dla $r = 2$, zatem x_5 wychodzi z bazy.

(slajdy: dr Danuta Jaruszewska-Walczak)

Przykład cd.

Dla bazy $\mathcal{B}_0 = \{4, 5\}$ mamy:

$$Y_0 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 12 \\ \hline -3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 19 \end{array}\right], \quad x^0 = [0, 0, 0, 7, 12]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^0 nie jest optymalny,
$\min\{-3, -5, -2, 0, 0\} = -5$ dla $s = 2$, x_2 wchodzi do bazy,
$\min\{\frac{7}{2}, \frac{12}{3}\} = \frac{7}{2}$ dla $r = 1$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

Dla bazy $\mathcal{B}_1 = \{2, 5\}$ mamy:

$$Y_1 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 7/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & -3/2 & 1 & 3/2 \\ \hline -1/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & 3/2 \end{array}\right], \quad x^1 = [0, 7/2, 0, 0, 3/2]^T,$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline c_1^{T} & z_1 \end{array}\right]$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny,
$\min\{-1/2, 0, 1/2, 3/2, 0\} = -1/2$ dla $s = 1$, x_1 wchodzi do bazy,
$\min\{\frac{7/2}{1/2}, \frac{3/2}{1/2}\} = \frac{3/2}{1/2}$ dla $r = 2$, zatem x_5 wychodzi z bazy.

Przykład cd.

Dla bazy $\mathcal{B}_0 = \{4, 5\}$ mamy:

$$Y_0 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 12 \\ \hline -3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 19 \end{array}\right], \quad x^0 = [0, 0, 0, 7, 12]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^0 nie jest optymalny,
$\min\{-3, -5, -2, 0, 0\} = -5$ dla $s = 2$, x_2 wchodzi do bazy,
$\min\{\frac{7}{2}, \frac{12}{3}\} = \frac{7}{2}$ dla $r = 1$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

Dla bazy $\mathcal{B}_1 = \{2, 5\}$ mamy:

$$Y_1 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 7/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & -3/2 & 1 & 3/2 \\ \hline -1/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & 3/2 \end{array}\right], \quad x^1 = [0, 7/2, 0, 0, 3/2]^T,$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline c_1^T & z_1 \end{array}\right]$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny,
$\min\{-1/2, 0, 1/2, 3/2, 0\} = -1/2$ dla $s = 1$, x_1 wchodzi do bazy,
$\min\{\frac{7/2}{1/2}, \frac{3/2}{1/2}\} = \frac{3/2}{1/2}$ dla $r = 2$, zatem x_5 wychodzi z bazy.

Przykład cd.

Dla bazy $\mathcal{B}_0 = \{4, 5\}$ mamy:

$$Y_0 = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 12 \\ \hline -3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 19 \end{array}\right], \quad x^0 = [0, 0, 0, 7, 12]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^0 nie jest optymalny,
$\min\{-3, -5, -2, 0, 0\} = -5$ dla $s = 2$, x_2 wchodzi do bazy,
$\min\{\frac{7}{2}, \frac{12}{3}\} = \frac{7}{2}$ dla $r = 1$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

Dla bazy $\mathcal{B}_1 = \{2, 5\}$ mamy:

$$Y_1 = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 7/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & -3/2 & 1 & 3/2 \\ \hline -1/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & 3/2 \end{array}\right], \quad x^1 = [0, 7/2, 0, 0, 3/2]^T,$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline c_1^T & z_1 \end{array}\right]$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny,
$\min\{-1/2, 0, 1/2, 3/2, 0\} = -1/2$ dla $s = 1$, x_1 wchodzi do bazy,
$\min\{\frac{7/2}{1/2}, \frac{3/2}{1/2}\} = \frac{3/2}{1/2}$ dla $r = 2$, zatem x_5 wychodzi z bazy.

Przykład cd.

Dla bazy $\mathcal{B}_0 = \{4, 5\}$ mamy:

$$Y_0 = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 12 \\ \hline -3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 19 \end{array}\right], \quad x^0 = [0, 0, 0, 7, 12]^T,$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^0 nie jest optymalny,
$\min\{-3, -5, -2, 0, 0\} = -5$ dla $s = 2$, x_2 wchodzi do bazy,
$\min\{\frac{7}{2}, \frac{12}{3}\} = \frac{7}{2}$ dla $r = 1$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

Dla bazy $\mathcal{B}_1 = \{2, 5\}$ mamy:

$$Y_1 = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 7/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & -3/2 & 1 & 3/2 \\ \hline -1/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & 3/2 \end{array}\right], \quad x^1 = [0, 7/2, 0, 0, 3/2]^T,$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline c_1^T & z_1 \end{array}\right]$$

kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny,
$\min\{-1/2, 0, 1/2, 3/2, 0\} = -1/2$ dla $s = 1$, x_1 wchodzi do bazy,
$\min\{\frac{7/2}{1/2}, \frac{3/2}{1/2}\} = \frac{3/2}{1/2}$ dla $r = 2$, zatem x_5 wychodzi z bazy.

$\mathcal{B}_1 = \{2, 5\} \quad x_1 \longleftrightarrow x_5$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_2 & b_2 \\ \hline c_2^T & z_2 \end{array}\right]$$

Przykład cd.

Dla bazy $\mathcal{B}_2 = \{2, 1\}$ mamy: $Y_2 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$,

$x^{opt} = x^2 = [3, 2, 0, 0, 0]^T$.

Wektor $\bar{x} = [3, 2, 0]^T$ jest (BRD) zadania wyjściowego, a z Y_2 odczytujemy postać bazową tego zadania - po odrzuceniu zmiennych sztucznych.

Faza II: $2x_1 + x_2 - 2x_3 \;\rightarrow\;$ min

$\mathcal{B}_0 = \{2, 1\}, \quad Y_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 8 \end{array}\right], \quad x^0 = [3, 2, 0]^T.$

min$\{0, 0, -1\} = -1$ dla $s = 3$, x_3 wchodzi do bazy,

min$\{\frac{2}{1}\} = \frac{2}{1}$ dla $r = 1$, zatem x_2 wychodzi z bazy.

$\mathcal{B}_1 = \{3, 1\}, \quad Y_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 1 & \mathbf{1} & 0 & 5 \\ \hline 0 & \mathbf{1} & 0 & 6 \end{array}\right], \quad x^{opt} = x^1 = [5, 0, 2]^T, \quad z_{min} = 6.$

$\mathcal{B}_1 = \{2, 5\}$ $x_1 \longleftrightarrow x_5$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_2 & b_2 \\ \hline c_2^T & z_2 \end{array}\right]$$

Przykład cd.

Dla bazy $\mathcal{B}_2 = \{2, 1\}$ mamy: $Y_2 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$,

$x^{opt} = x^2 = [3, 2, 0, 0, 0]^T$.

Wektor $\bar{x} = [3, 2, 0]^T$ jest (BRD) zadania wyjściowego, a z Y_2 odczytujemy postać bazową tego zadania - po odrzuceniu zmiennych sztucznych.

Faza II: $2x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$

$\mathcal{B}_0 = \{2, 1\}$, $Y_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \mathbf{1} & \boxed{\mathbf{1}} & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 8 \end{array}\right]$, $x^0 = [3, 2, 0]^T$.

$\min\{0, 0, -1\} = -1$ dla $s = 3$, x_3 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{2}{1}\} = \frac{2}{1}$ dla $r = 1$, zatem x_2 wychodzi z bazy.

$\mathcal{B}_1 = \{3, 1\}$, $Y_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 1 & \mathbf{1} & 0 & 5 \\ \hline 0 & \mathbf{1} & 0 & 6 \end{array}\right]$, $x^{opt} = x^1 = [5, 0, 2]^T$, $z_{min} = 6$.

! baza $\mathcal{B}_2 = \{2, 1\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

dla $x_3 = x_4 = x_5 = 0$
otrzymujemy $x_1 = 3$
oraz $x_2 = 2$!

$\mathcal{B}_1 = \{2, 5\} \qquad x_1 \longleftrightarrow x_5$

Przykład cd.

Dla bazy $\mathcal{B}_2 = \{2, 1\}$ mamy: $Y_2 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$,

$x^{opt} = x^2 = [3, 2, 0, 0, 0]^T$.

Wektor $\bar{x} = [3, 2, 0]^T$ jest (BRD) zadania wyjściowego, a z Y_2 odczytujemy postać bazową tego zadania - po odrzuceniu zmiennych sztucznych.

Faza II: $2x_1 + x_2 - 2x_3 \to \min$

$\mathcal{B}_0 = \{2, 1\}$, $\quad Y_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 8 \end{array}\right]$, $\quad x^0 = [3, 2, 0]^T$.

$\min\{0, 0, -1\} = -1$ dla $s = 3$, x_3 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{2}{1}\} = \frac{2}{1}$ dla $r = 1$, zatem x_2 wychodzi z bazy.

$\mathcal{B}_1 = \{3, 1\}$, $\quad Y_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 1 & \mathbf{1} & 0 & 5 \\ \hline 0 & \mathbf{1} & 0 & 6 \end{array}\right]$, $\quad x^{opt} = x^1 = [5, 0, 2]^T$, $\quad z_{min} = 6$.

$\mathcal{B}_1 = \{2, 5\}$ $\quad x_1 \longleftrightarrow x_5$

Przykład cd.

Dla bazy $\mathcal{B}_2 = \{2, 1\}$ mamy: $Y_2 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$,

- $x^{opt} = x^2 = [3, 2, 0, 0, 0]^T$.

Wektor $\bar{x} = [3, 2, 0]^T$ jest (BRD) zadania wyjściowego, a z Y_2 odczytujemy postać bazową tego zadania - po odrzuceniu zmiennych sztucznych.

Faza II: $2x_1 + x_2 - 2x_3 \to \min$ ≥ 0

$\mathcal{B}_0 = \{2, 1\}$, $\quad Y_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \boxed{1} & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 8 \end{array}\right]$, $\quad x^0 = [3, 2, 0]^T$.

$\min\{0, 0, -1\} = -1$ dla $s = 3$, x_3 wchodzi do bazy.

$\min\{\frac{2}{1}\} = \frac{2}{1}$ dla $r = 1$, zatem x_2 wychodzi z bazy.

$\mathcal{B}_1 = \{3, 1\}$, $\quad Y_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right]$, $\quad x^{opt} = x^1 = [5, 0, 2]^T$, $\quad z_{min} = 6$.

Przykład cd.

Dla bazy $\mathcal{B}_2 = \{2, 1\}$ mamy: $Y_2 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$,

$x^{opt} = x^2 = [3, 2, 0, 0, 0]^T$.

Wektor $\bar{x} = [3, 2, 0]^T$ jest (BRD) zadania wyjściowego, a z Y_2 odczytujemy postać bazową tego zadania - po odrzuceniu zmiennych sztucznych.

$\boxed{\text{Faza II:}}$ $2x_1 + x_2 - 2x_3 \ \to \ \min$

$\mathcal{B}_0 = \{2, 1\}$, $Y_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \boxed{1} & 2 \\ 1 & 0 & \boxed{-1} & 3 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 8 \end{array}\right]$, $x^0 = [3, 2, 0]^T$.

$\min\{0, 0, -1\} = -1$ dla $s = 3$, x_3 wchodzi do bazy,

$\min\{\frac{2}{1}\} = \frac{2}{1}$ dla $r = 1$, zatem x_2 wychodzi z bazy.

$\mathcal{B}_1 = \{3, 1\}$, $Y_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right]$, $x^{opt} = x^1 = [5, 0, 2]^T$, $z_{min} = 6$.

$\geq 0 \longrightarrow$ STOP

baza $B_1 = \{3, 1\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 5$
$x_3 = 2$ $\Leftarrow$ $x_2 = 0$

KONIEC

DWUFAZOWA METODA SYMPLEKS

Dla zagadnienia

$$c^T x \;\to\; \text{max (min)}$$

$$Ax = b, \quad x \geq 0,$$

gdzie $c \in R^n,\ b \in R^m,\ b \geq 0,\ A \in M_{m \times n},\ rz\,A = m$, które nie jest w postaci bazowej, tworzymy zadanie pomocnicze (Faza I)

$$\mathbf{1} x_S \;\to\; \text{min}$$

$$Ax + \mathrm{I}\, x_S = b, \quad x, x_S \geq 0,\ \mathbf{1} = [1, \ldots, 1] \in R^m,$$

gdzie x_S jest wektorem zmiennych sztucznych.

Uwaga. Zagadnienie Fazy I ma zawsze rozwiązanie - jest niesprzeczne (wektor $[0, b]^T$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym) i funkcja celu jest ograniczona z dołu.

(DWUFAZOWA) METODA SYMPLEKS

(przypomnienie)

Przykład. Rozważymy zadanie

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 \;\to\; \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 12, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Faza I:

Układ nie jest w postaci bazowej.
Wprowadzamy wektor tzw. zmiennych **sztucznych**

$$x_S = [x_4, x_5]^T$$

i rozwiązujemy pomocnicze zadanie (metodą sympleks)

$$x_4 + x_5 \;\to\; \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 &= 12, \quad x_j \geq 0,\; j = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

$$B_0 = \{4, 5\}$$

obliczenia

$\ldots \quad \bar{x}^{opt} = [\underbrace{3, 2, 0}_{= [x_1, x_2, x_3]}, \underbrace{0, 0}_{\bar{x}_S = 0}]$

$\bar{x}$ dobry start dla algorytmu

DWUFAZOWA METODA SYMPLEKS cd.

Zagadnienie Fazy **I** jest w postaci bazowej - można zastosować do niego metodę sympleks.

Twierdzenie 1. Jeśli $[\bar{x}, \bar{x}_S]^T$ jest rozwiązaniem optymalnym zagadnienia Fazy **I**, to
$\bar{x}_S \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ wyjściowe zadanie jest sprzeczne.

Twierdzenie 2. Jeśli $[\bar{x}, \bar{x}_S]^T$ jest rozwiązaniem optymalnym zagadnienia Fazy **I** i $\bar{x}_S = 0$, to $\bar{x}$ jest bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym (BRD) wyjściowego zadania.

Wniosek. W oparciu o (BRD) uzyskane w Fazie **I**, można metodą sympleks rozwiązać wyjściowy problem (Faza **II**).

Zauważmy, że może być wiele możliwych zmiennych wychodzących — ma to miejsce, gdy w wielu równaniach iloraz wyrazu wolnego i współczynnika przy zmiennej wchodzącej jest taki sam. Może to prowadzić do „zapętlenia” algorytmu. Zapętlenie się algorytmu Simplex jest równoważne powrotowi do tej samej bazy.

$$
\begin{array}{rrcl}
\text{zmaksymalizować} & 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 & & \\
\text{przy zachowaniu warunków:} & x_1 - 11x_2 - 5x_3 + 18x_4 & \leq & 0 \\
 & x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 & \leq & 0 \\
 & x_1 & \leq & 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Twierdzenie [Reguła Blanda] (1977)

Jeśli podczas wymiany bazy (1) spośród możliwych zmiennych wchodzących wybierana jest zmienna o najmniejszym indeksie oraz (2) spośród możliwych zmiennych wychodzących wybierana jest zmienna o najmniejszym indeksie, to algorytm Simplex kończy swoje działanie.

Ponieważ dla programu o m zmiennych niebazowych i n zmiennych niebazowych mamy $O(\binom{n+m}{n})$ możliwych baz, więc algorytm Simplex z regułą Blanda wykonuje $O(\binom{n+m}{n})$ operacji wymiany bazy (przy każdej z nich wykonuje się $O(nm)$ operacji arytmetycznych). Z drugiej strony, odnotujmy, że istnieją przykłady programów liniowych, dla których algorytm Simplex działa w czasie $\Omega(2^n)$.

Przykład KLEE-MINTY (ang. Klee-Minty cube/polytope, 1972)

$$
\begin{array}{rlcl}
\text{zmaksymalizować} & 2^{n-1}x_1 + 2^{n-2}x_2 + \ldots + 2x_{n-1} + x_n & & \\
\text{przy zachowaniu warunków} & x_1 & \leq & 5 \\
 & 4x_1 + x_2 & \leq & 25 \\
 & 8x_1 + 4x_2 + x_3 & \leq & 125 \\
 & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & 2^n x_1 + 2^{n-1}x_2 + \ldots + 4x_{n-1} + x_n & \leq & 5^n \\
 & x_1, x_2, \ldots, x_n & \geq & 0
\end{array}
$$

- Powyższe PL ma n zmiennych, n ogranicznień nieelementarnych i n ograniczeń elementarnych.
- Jego obszar dopuszczalny posiada 2^n wierzchołków (tyle, ile n-wymiarowa hiperkostka)
- Jeśli pierwszym rozwiązaniem bazowym dla algorytmu Simplex będzie $\bar{x} = [0, 0, \ldots]^T$, wówczas algorytm Simplex sprawdzi wszystkie 2^n wierzchołków obszaru dopuszcalnego, osiągając optymalne rozwiązanie dla $\bar{x} = [0, 0, \ldots, 5^n]^T$.

DUALIZM W PROGRAMOWANIU LINIOWYM (krótko)

Niech dane będą macierz $A_{m\times n}$ oraz wektory $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$.

Zadanie pierwotne (ZP):

$$c^T x \longrightarrow \max, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$$Ax \le b, \quad x \ge 0,$$

← m ograniczeń nieelementarnych
← n zmiennych

Zadanie dualne (ZD):

$$b^T y \longrightarrow \min, \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

$$A^T y \ge c, \quad y \ge 0,$$

← m zmiennych
← n ograniczeń nieelementarnych

Przykład.

(ZP) $2x_1 + 3x_2 \;\rightarrow\; \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 14 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(ZD) $14y_1 + 8y_2 + 16y_3 \;\rightarrow\; \min$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 \ge 2 \\ 2y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(slajdy: dr Danuta Jaruszewska-Walczak)

KOMPLEMENTARNOŚĆ (ZP) I (ZD)

Twierdzenie.
(a) Jeśli wektory x, y są dopuszczalne dla zadania pierwotnego (ZP) i dualnego (ZD) odpowiednio, to

$$c^T x \leq y^T b.$$

(b) Jeśli wektory x, y są optymalne dla zadania pierwotnego (ZP) i dualnego (ZD) odpowiednio, to

$$y^T(b - Ax) = 0, \quad (y^T A - c^T)x = 0.$$

(c) Jeśli wektory x, y są optymalne dla zadania pierwotnego (ZP) i dualnego (ZD) odpowiednio, to

$$c^T x = y^T b.$$

Uwaga. Implikacje w (b) i (c) można odwrócić przy dodatkowym założeniu, że x, y są dopuszczalne dla zadania (ZP) i (ZD) odpowiednio:

(1) Jeśli x, y są dopuszczalne dla zadania (ZP) i (ZD) odpowiednio, $y^T(b - Ax) = 0$ oraz $(y^T A - c^T)x = 0$, to x, y są optymalne dla zadania (ZP) i (ZD) odpowiednio.

! (2) Jeśli x, y są dopuszczalne dla zadania (ZP) i (ZD) odpowiednio oraz $c^T x = y^T b$, to x, y są optymalne dla zadania (ZP) i (ZD) odpowiednio.

(slajdy: dr Danuta Jaruszewska-Walczak)