PROGRAMOWANIE LINIOWE

- Sformułowanie zagadnienia
- Algorytm Simplex
- Problem dualny
- Całkowitoliczbowe programowanie liniowe
- Przykłady zastosowań
- Algorytmy/Narzędzia

PROGRAMOWANIE LINIOWE 2D - METODA GRAFICZNA

max $x + y$

$\frac{1}{2}x + y \leq 3$

$2x + y \leq 6$

$x, y \geq 0$

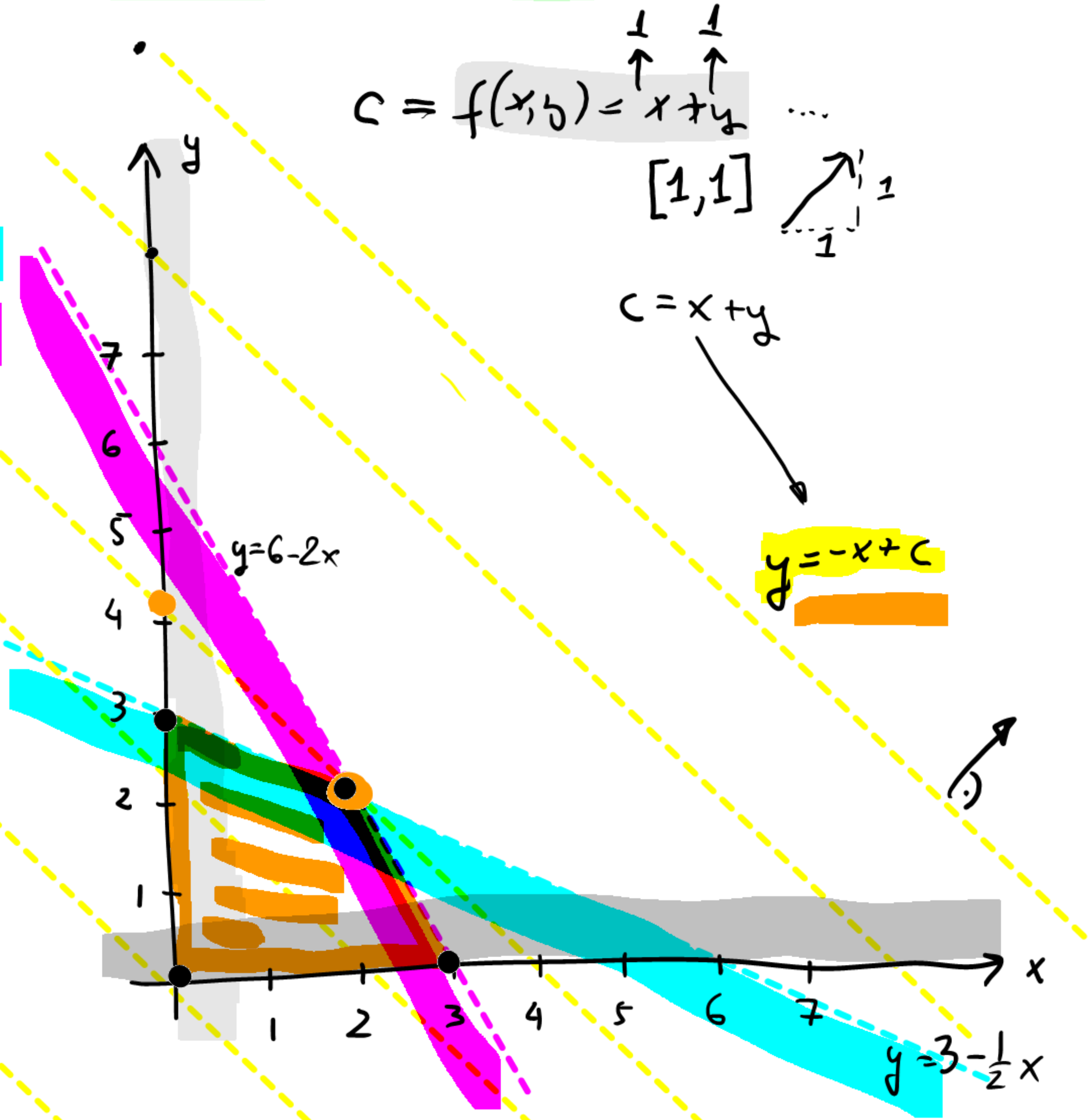
$\frac{1}{2}x + y \leq 3$ $\quad y \leq 3 - \frac{1}{2}x$

$2x + y \leq 6$ $\quad y \leq 6 - 2x$

$[1,1]$

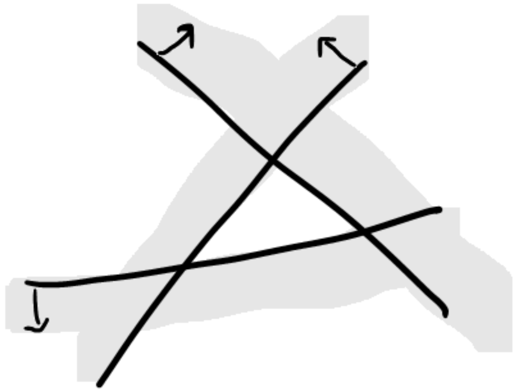
$x \geq 0$

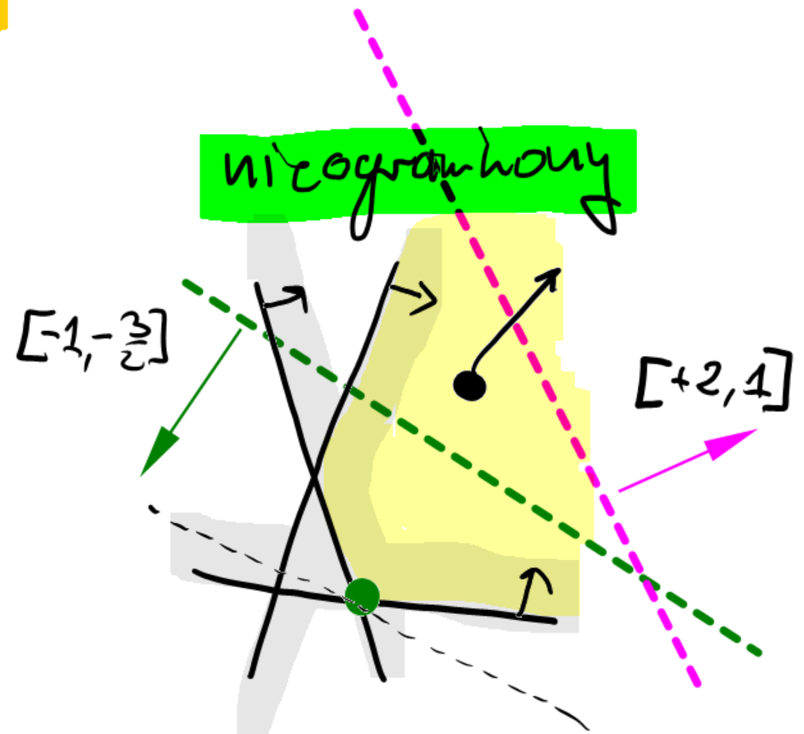
$y \geq 0$

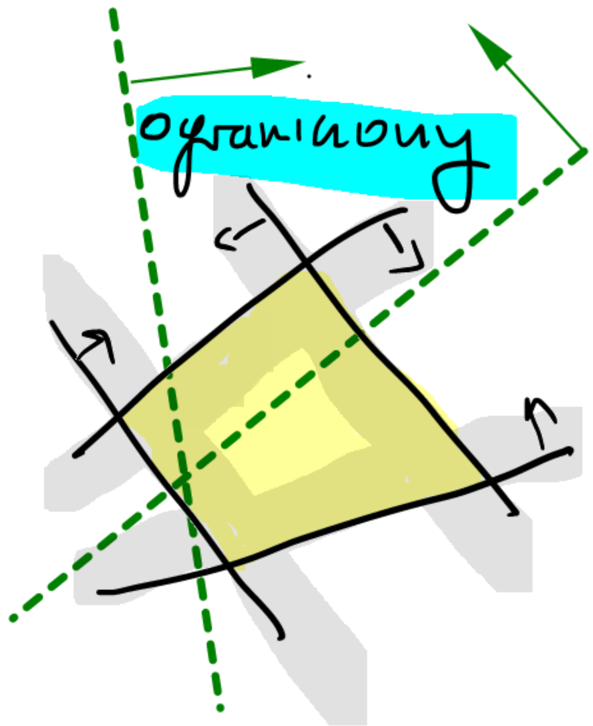


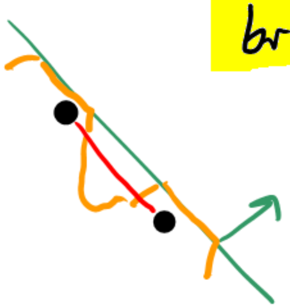
Obszar dopuszczalny

pusty	nieograniczony	ograniczony



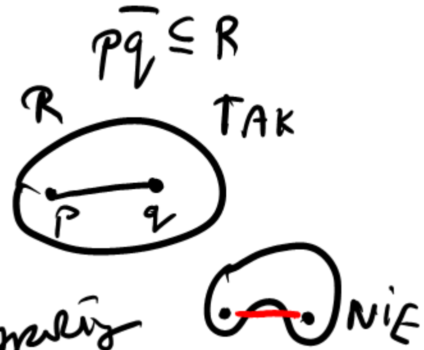






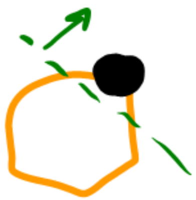
brak — skończone — nieskończone — skończone

↑ ROZWIĄZANIE



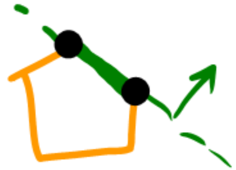
Czy OPT jest wierzchołkiem $\underbrace{\text{obszaru dopuszczalnego}}$?

↳ skończone



przecięcie półpłaszczyzn → obszar wypukły

przecięcie obszarów wypukłych jest wypukłe !



PROGRAMOWANIE LINIOWE 2D - METODA GRAFICZNA

konsekwencje algorytmiczne

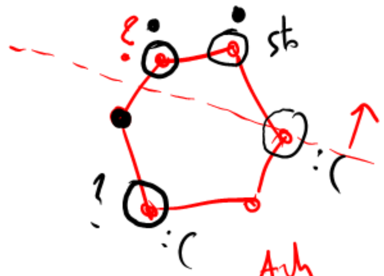
2D:
$O(n \lg n)$
n - liczba ograniczeń
d - liczba zmiennych
d=2

ZBIÓR PÓŁPŁASZCZYZN + funkcja celu

- wyznaczenie części wspólnej (obszar dopuszczalny)

1. pusty → brak rozwiązań
2. nieograniczony → nieskończone, skończone
3. ograniczony → skończone

skończone → wierzchołek obszaru dopuszczalnego ⇒ OPT



n - punktów
$\# \leq n$

3D i dalej

POSTAĆ STANDARDOWA

- n liczb rzeczywistych $c_1, c_2, \ldots, c_n$;
- m liczb rzeczywistych $b_1, b_2, \ldots, b_m$;
- mn liczb rzeczywistych a_{ij} dla $i = 1, \ldots, m$ oraz $j = 1, \ldots, n$.

ZADANIE OPTYMALIZACYJNE

$$\begin{array}{rrcll}
\text{zmaksymalizować} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
\text{przy zachowaniu warunków} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = & b_j & \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \\
 & x_j & \geq & 0 & \text{dla } j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}$$

ZADANIE OPTYMALIZACYJNE (bardziej formalna postać)

$$\begin{array}{rrcl}
\text{zmaksymalizować} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} & & \\
\text{przy zachowaniu warunków} & A\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} & \geq & 0
\end{array}$$

gdzie $\mathbf{c} = (c_j)$ jest wektorem wymiaru n, $\mathbf{x} = (x_j)$ jest wektorem wymiaru n, $A = (a_{ij})$ jest macierzą wymiaru $m \times n$ oraz $\mathbf{b} = (b_i)$ jest wektorem wymiaru m.

MACIERZ BAZOWA UKŁADU

Dla macierzy $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ i wektora $b = [b_1, \ldots, b_m]^T$ rozważamy

$$Ax = b, \quad x \geq 0.$$

Niech A będzie macierzą rzędu m (tzn. $m \leq n$, a w praktyce $m < n$). Jeśli $a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}$ są liniowo niezależnymi kolumnami macierzy A, to macierz utworzona z tych kolumn

$$B = [a_{j_1} \; \ldots \; a_{j_m}]_{m \times m}$$

nazywamy **macierzą bazową** układu, a wektor

$$x_B = [x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}]^T$$

nazywamy wektorem **zmiennych bazowych**. Wtedy macierz utworzona z pozostałych kolumn

$$D = [\, a_{j_{m+1}} \; \ldots \; a_{j_n} \,]$$

nazywamy **macierzą dopełniającą**, a zmienne

$$x_D = [x_{j_{m+1}}, \ldots, x_{j_m}]^T$$

nazywamy **zmiennymi niebazowymi** lub dopełniającymi.

niezależne

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

zależne :(

= ...

x_1, x_3 zmienne bazowe

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ macierz bazowa

x_2, x_4 zmienne niebazowe (dopełniające)

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

macierz dopełniająca

POSTAĆ BAZOWA UKŁADU

Układ $Ax = b$ przekształcamy w następujący sposób

$$Bx_B + Dx_D = b \quad / \cdot B^{-1}$$

$$x_B + B^{-1}Dx_D = B^{-1}b.$$

Otrzymany układ nazywamy układem **w postaci bazowej** dla układu $Ax = b$ względem tzw. **zbioru bazowego**

$$\mathcal{B} = \{j_1, \ldots, j_m\}.$$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Przykład.

wierzchni

Dla układu $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

postacią bazową względem zbioru bazowego $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ będzie:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad / \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

POSTAĆ BAZOWA UKŁADU

Układ $Ax = b$ przekształcamy w następujący sposób

$$Bx_B + Dx_D = b \qquad / \cdot B^{-1}$$

$$x_B + B^{-1}Dx_D = B^{-1}b.$$

Otrzymany układ nazywamy układem **w postaci bazowej** dla układu $Ax = b$ względem tzw. **zbioru bazowego**

$$\mathcal{B} = \{j_1, \dots, j_m\}.$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Przykład.

mnożniki

Dla układu $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

postacią bazową względem zbioru bazowego $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ będzie:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad / \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$x_1 = 2, \; x_3 = 5 \quad \geq 0$

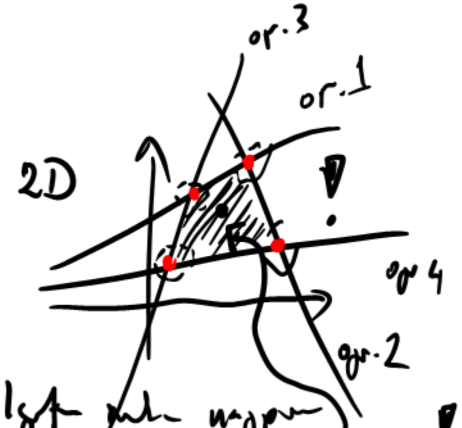
$x_2, x_4 = 0 \quad \geq 0$

Idea (po co?)

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

„punkt startu" dla algorytmu

→ bazowe rozwiązanie!



Algorytm potrzebuje najpierw punktu startu (wierzchołek) ≥ 0!

$\mathcal{B}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\mathcal{D}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_B = B^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$\bar{x}_D = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad x_2 = 0 \quad x_4 = 0$$

BAZOWE ROZWIĄZANIA UKŁADU

Dla układu $Ax = b$ **bazowym rozwiązaniem** (BR) względem bazy $\mathcal{B}$ nazywamy rozwiązanie $\bar{x}$ takie, że

$$\bar{x}_B = B^{-1}b, \quad \bar{x}_D = 0.$$

Bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym (BRD) względem bazy $\mathcal{B}$ nazywamy takie rozwiązanie (BR), że $\bar{x} \geq 0$. Bazowe rozwiązanie dopuszczalne (BRD) nazywamy **niezdegenerowanym**, gdy

$$\bar{x}_B = B^{-1}b > 0,$$

w przeciwnym przypadku nazywamy je **zdegenerowanym**.

Przykład.

Dla układu $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

rozwiązaniem bazowym względem bazy $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ jest $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Jest to rozwiązanie dopuszczalne i niezdegenerowane.

METODA SYMPLEKS *

standardowa postać PL

Rozważamy zadanie programowania liniowego

$$c^T x \;\to\; \max$$

$$Ax = b, \quad x \geq 0,$$

gdzie

$$c^T = [c_1, \ldots, c_n], \;\; x = [x_1, \ldots, x_n]^T, \;\; A = [a_{ij}]_{m \times n}, \;\; b = [b_1, \ldots, b_m]^T.$$

Układ $Ax = b$ przedstawiamy w postaci bazowej

$$I x_{B_0} + B_0^{-1} D x_{D_0} = B_0^{-1} b$$

z macierzą bazową B_0. Równoważnie

$$A_0 := B_0^{-1} A, \quad b_0 := B_0^{-1} b \quad \Rightarrow \quad A_0 x = b_0.$$

Niech x^0 będzie dopuszczalnym rozwiązaniem bazowym, $x^0_{B_0}$ to jego zmienne bazowe, $x^0_{D_0}$ to zmienne dopełniające, $x^0_{D_0} = 0$.

* wariant z założeniem, że x^0 jest dopuszczalne

(slajdy: dr Danuta Jaruszewska-Walczak)

METODA SYMPLEKS cd.

Obliczamy $c_0 = c - A_0^T c_{B_0}$, $z_0 = c^T x^0$ oraz tworzymy

$$Y_0 = [y_{ij}]_{(m+1)\times(n+1)} \quad Y_0 = \left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right].$$

macierz współczynników

wektor ograniczeń

wartość funkcji celu

współczynniki przy funkcji celu

Sprawdzamy **kryterium stopu**: $\boxed{\text{czy } c_0 \le 0?}$
Jeśli tak - to x^0 jest rozwiązaniem optymalnym.
Jeśli nie - to wybieramy $s \in \{1,\ldots,n\}$ tak, by

$$c_{o,s} = \max_{1\le j\le n} c_{o,j},$$

a wtedy, jeśli wszystkie $y_{is} \le 0$, $1 \le i \le m$,, to zadanie jest nieograniczone; w przeciwnym razie wyznaczamy $r \in \{1,\ldots,m\}$ tak, by

$$\frac{y_{r,n+1}}{y_{r,s}} = \min\left\{\frac{y_{i,n+1}}{y_{i,s}} : \; y_{i,s} > 0\right\}$$

i przekształcamy układ do nowej postaci bazowej:
r-tą współrzędną wektora x_{B_0} zastępujemy przez x_s.

$f(x) = -2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$

$b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

Przykład 1.

Zastosujemy metodę sympleks do zadania:

$$-2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_4 = 7, \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Mamy $c^T = [-2, 1, 0, 0]$ oraz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 1 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} \end{bmatrix}$.

Ostatnie dwie kolumny macierzy A pasują do postaci bazowej układu z bazą $\mathcal{B}_0 = \{3, 4\}$ i macierzą bazową $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Zatem

$$A_0 = B_0^{-1} A = A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_0 = B_0^{-1} b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix},$$

rozwiązaniem bazowym jest dopuszczalne $x^0 = [0, 0, 8, 7]^T$.

$$f(x) = -2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

chcemy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}$$

Przykład 1.

Zastosujemy metodę sympleks do zadania:

$$-2x_1 + x_2 \ \rightarrow \ \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_4 = 7, \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Mamy $c^T = [-2, 1, 0, 0]$ oraz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 1 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} \end{bmatrix}$.

Ostatnie dwie kolumny macierzy A pasują do postaci bazowej układu z bazą $\mathcal{B}_0 = \{3, 4\}$ i macierzą bazową $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Zatem

$$A_0 = B_0^{-1} A = A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_0 = B_0^{-1} b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix},$$

rozwiązaniem bazowym jest dopuszczalne $x^0 = [0, 0, 8, 7]^T$.

$f(x) = -2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$

$b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

Przykład 1.
Zastosujemy metodę sympleks do zadania:

$$-2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_4 = 7, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Mamy $c^T = [-2, 1, 0, 0]$ oraz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 1 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} \end{bmatrix}$.
Ostatnie dwie kolumny macierzy A pasują do postaci bazowej układu z bazą $\mathcal{B}_0 = \{3, 4\}$ i macierzą bazową $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Zatem

$$A_0 = B_0^{-1} A = A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_0 = B_0^{-1} b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix},$$

rozwiązaniem bazowym jest dopuszczalne $x^0 = [0, 0, 8, 7]^T$.

$A \cdot x = b$

chcemy

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}$

$$A_0 = \begin{array}{cccc} & x_i & & x_j \\ \left[\begin{matrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right] \end{array}$$

baza $\{i, j\}$

lub

baza $\{j, i\}$

$$A_0 = \begin{bmatrix} \blacksquare & 0 & 1 & \blacksquare \\ \blacksquare & 1 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}$$
$x_j \quad x_i$

...

(slajdy: dr Danuta Jaruszewska-Walczak)

$f(x) = -2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$

$b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

Przykład 1.
Zastosujemy metodę sympleks do zadania:

$$-2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_4 = 7, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

$A \cdot x = b$

chcemy

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}$

Mamy $c^T = [-2, 1, 0, 0]$ oraz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 1 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} \end{bmatrix}$.
Ostatnie dwie kolumny macierzy A pasują do postaci bazowej układu z bazą $\mathcal{B}_0 = \{3, 4\}$ i macierzą bazową $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Zatem

$$A_0 = B_0^{-1} A = A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_0 = B_0^{-1} b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix},$$

rozwiązaniem bazowym jest dopuszczalne $x^0 = [0, 0, 8, 7]^T$.

$A_0 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \blacksquare & 1 & \blacksquare & 0 \\ \blacksquare & 0 & \blacksquare & 1 \end{bmatrix} \\ \quad\; x_i \quad\; x_j \end{array}$ baza $\{i, j\}$

lub

$A_0 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \blacksquare & 0 & 1 & \blacksquare \\ \blacksquare & 1 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix} \\ \quad\; x_j \quad x_i \end{array}$ baza $\{j, i\}$

...

u nas: $A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \qquad\qquad x_3 \;\; x_4 \end{array}$ od razu

(slajdy: dr Danuta Jaruszewska-Walczak)

$f(x) = -2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$

$b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

Przykład 1.
Zastosujemy metodę sympleks do zadania:

$$-2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_4 = 7, \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

$A \cdot x = b$

chcemy

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}$

Mamy $c^T = [-2, 1, 0, 0]$ oraz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 1 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} \end{bmatrix}$.
Ostatnie dwie kolumny macierzy A pasują do postaci bazowej układu z bazą $\mathcal{B}_0 = \{3, 4\}$ i macierzą bazową $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Zatem

$$A_0 = B_0^{-1} A = A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_0 = B_0^{-1} b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix},$$

rozwiązaniem bazowym jest dopuszczalne $x^0 = [0, 0, 8, 7]^T$.

$$A_0 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \blacksquare & 1 & \blacksquare & 0 \\ \blacksquare & 0 & \blacksquare & 1 \end{bmatrix} \\ \quad\ \ x_i \quad\ \ x_j \end{array}$$

baza $\{i, j\}$

u nas: $A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \qquad\quad x_3 \ \ x_4 \end{array}$ od razu

$f(x) = -2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$

$b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

Przykład 1.
Zastosujemy metodę sympleks do zadania:

$$-2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ \quad\ x_1 + x_4 = 7, \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

$A \cdot x = b$

chcemy

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}$

Mamy $c^T = [-2, 1, 0, 0]$ oraz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Ostatnie dwie kolumny macierzy A pasują do postaci bazowej układu z bazą $\mathcal{B}_0 = \{3, 4\}$ i macierzą bazową $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Zatem

$$A_0 = B_0^{-1} A = A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_0 = B_0^{-1} b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix},$$

rozwiązaniem bazowym jest dopuszczalne $x^0 = [0, 0, 8, 7]^T$.

≥ 0

$$A_0 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \blacksquare & 1 & \blacksquare & 0 \\ \blacksquare & 0 & \blacksquare & 1 \end{bmatrix} \\ \quad\ x_i \quad\ \ x_j \end{array}$$

baza $\{i, j\}$

u nas: $A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \qquad\qquad x_3 \quad x_4 \end{array}$ od razu

$x_k = 0$
$x_t = 0$ oraz $\begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} = b_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

macierz współczynników

wektor ograniczeń

METODA SYMPLEKS cd.

Obliczamy $c_0 = c - A_0^T c_{B_0}$, $z_0 = c^T x^0$ oraz tworzymy

$$Y_0 = [y_{ij}]_{(m+1)\times(n+1)} \quad Y_0 = \left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right].$$

wartość funkcji celu

współczynniki przy funkcji celu

Sprawdzamy **kryterium stopu**: $\boxed{\text{czy } c_0 \le 0?}$
Jeśli tak - to x^0 jest rozwiązaniem optymalnym.
Jeśli nie - to wybieramy $s \in \{1, \ldots, n\}$ tak, by

$$c_{o,s} = \max_{1 \le j \le n} c_{o,j},$$

a wtedy, jeśli wszystkie $y_{is} \le 0,\ 1 \le i \le m,$, to zadanie jest nieograniczone; w przeciwnym razie wyznaczamy $r \in \{1, \ldots, m\}$ tak, by

$$\frac{y_{r,n+1}}{y_{r,s}} = \min\left\{\frac{y_{i,n+1}}{y_{i,s}} :\ y_{i,s} > 0\right\}$$

i przekształcamy układ do nowej postaci bazowej:
r-tą współrzędną wektora x_{B_0} zastępujemy przez x_s.

$$A_0 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

indeks

$$c = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{array} \qquad c_{B_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

baza $B_0 = \{3, 4\}$ (czyli x_3 i x_4)

$x^0 = [0, 0, 8, 7]$

Przykład 1. cd.

Obliczamy

$$c_0 = c - A_0^T c_{B_0} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = c^T x^0 = 0.$$

Zbieramy te informacje do macierzy

$$Y_0 = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right]$$

Czy $c_0 \leq 0$? NIE, zatem wybieramy s tak, by

$$c_{o,s} = \max_j c_{o,j} = \max\{-2, 1, 0, 0\} = 1 \quad \Rightarrow \quad s = 2.$$

Badamy elementy $y_{i,s}$, $1 \leq i \leq 2$, - wszystkie są ≤ 0, co oznacza, że zadanie jest nieograniczone czyli funkcja celu rośnie nieograniczenie na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych.

$A_0 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $b_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

indeks

$c = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots 1 \\ \dots 2 \\ \dots 3 \\ \dots 4 \end{matrix}$ $c_{B_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

baza $B_0 = \{3, 4\}$ (czyli x_3 i x_4)

$x^0 = [0, 0, 8, 7]$

Przykład 1. cd.

Obliczamy

$$c_0 = c - A_0^T c_{B_0} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = c^T x^0 = 0.$$

Zbieramy te informacje do macierzy

$$\begin{bmatrix} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{bmatrix}$$

$$Y_0 = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & \boxed{-1} & 1 & 0 & 8 \\ 1 & \boxed{0} & 0 & 1 & 7 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Czy $c_0 \leq 0$? NIE, zatem wybieramy s tak, by

$$c_{o,s} = \max_j c_{o,j} = \max\{-2, 1, 0, 0\} = 1 \quad \Rightarrow \quad s = 2.$$

Badamy elementy $y_{i,s}$, $1 \leq i \leq 2$, - wszystkie są ≤ 0, co oznacza, że zadanie jest nieograniczone czyli funkcja celu rośnie nieograniczenie na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych.

$A_0 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $b_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

indeks

$$c = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \dots 1 \\ \dots 2 \\ \dots 3 \\ \dots 4 \end{array} \qquad c_{B_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

baza $B_0 = \{3, 4\}$ (czyli x_3 i x_4)

$x^0 = [0, 0, 8, 7]$

Przykład 1. cd.

Obliczamy

$$c_0 = c - A_0^T c_{B_0} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = c^T x^0 = 0.$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array} \right]$$

Zbieramy te informacje do macierzy

$$Y_0 = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & \boxed{-1} & 1 & 0 & 8 \\ 1 & \boxed{0} & 0 & 1 & 7 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Czy $c_0 \le 0$? NIE, zatem wybieramy s tak, by

$$c_{o,s} = \max_j c_{o,j} = \max\{-2, 1, 0, 0\} = 1 \quad \Rightarrow \quad s = 2.$$

Badamy elementy $y_{i,s}$, $1 \le i \le 2$, - wszystkie są ≤ 0, co oznacza, że zadanie jest nieograniczone czyli funkcja celu rośnie nieograniczenie na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych.

$A_0 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $b_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

indeks

$$c = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \cdots 1 \\ \cdots 2 \\ \cdots 3 \\ \cdots 4 \end{array} \end{array}$$

$c_{B_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

baza $B_0 = \{3, 4\}$ (czyli x_3 i x_4)

$x^0 = [0, 0, 8, 7]$

Przykład 1. cd.

Obliczamy

$$c_0 = c - A_0^T c_{B_0} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = c^T x^0 = 0.$$

Zbieramy te informacje do macierzy

$$Y_0 = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array} \right]$$

Czy $c_0 \leq 0$? NIE, zatem wybieramy s tak, by

$$c_{o,s} = \max_j c_{o,j} = \max\{-2, 1, 0, 0\} = 1 \quad \Rightarrow \quad s = 2.$$

Badamy elementy $y_{i,s}$, $1 \leq i \leq 2$, - wszystkie są ≤ 0, co oznacza, że zadanie jest nieograniczone czyli funkcja celu rośnie nieograniczenie na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych.

macierz współczynników

METODA SYMPLEKS cd.

wektor ograniczeń

Obliczamy $c_0 = c - A_0^T c_{B_0}$, $z_0 = c^T x^0$ oraz tworzymy

$$Y_0 = [y_{ij}]_{(m+1)\times(n+1)} \qquad Y_0 = \left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right].$$

wartość funkcji celu

współczynniki przy funkcji celu

Sprawdzamy **kryterium stopu**: $\boxed{\text{czy } c_0 \leq 0?}$
Jeśli tak - to x^0 jest rozwiązaniem optymalnym.
Jeśli nie - to wybieramy $s \in \{1, \ldots, n\}$ tak, by

$$c_{o,s} = \max_{1 \leq j \leq n} c_{o,j},$$

a wtedy, jeśli wszystkie $y_{is} \leq 0,\ 1 \leq i \leq m,$, to zadanie jest nieograniczone; w przeciwnym razie wyznaczamy $r \in \{1, \ldots, m\}$ tak, by

$$\frac{y_{r,n+1}}{y_{r,s}} = \min \left\{ \frac{y_{i,n+1}}{y_{i,s}} :\ y_{i,s} > 0 \right\}$$

i przekształcamy układ do nowej postaci bazowej:
r-tą współrzędną wektora x_{B_0} zastępujemy przez x_s.

$A_0 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad b_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

indeks

$$c = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \dots 1 \\ \dots 2 \\ \dots 3 \\ \dots 4 \end{array} \qquad c_{B_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

baza $B_0 = \{3, 4\}$ (czyli x_3 i x_4)

$x^0 = [0, 0, 8, 7]$

Przykład 1. cd.

Obliczamy

$$c_0 = c - A_0^T c_{B_0} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = c^T x^0 = 0.$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right]$$

Zbieramy te informacje do macierzy

$$Y_0 = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & \boxed{-1} & 1 & 0 & 8 \\ 1 & \boxed{0} & 0 & 1 & 7 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Czy $c_0 \leq 0$? NIE, zatem wybieramy s tak, by

$$c_{o,s} = \max_j c_{o,j} = \max\{-2, 1, 0, 0\} = 1 \quad \Rightarrow \quad s = 2.$$

(druga kolumna) } zatem x_2 jest kandydatem do bazy

Badamy elementy $y_{i,s}$, $1 \leq i \leq 2$, - wszystkie są ≤ 0, co oznacza, że zadanie jest nieograniczone czyli funkcja celu rośnie nieograniczenie na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych.

$A_0 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $b_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

indeks

$$c = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdots 1 \\ \cdots 2 \\ \cdots 3 \\ \cdots 4 \end{array} \qquad c_{B_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

baza $B_0 = \{3, 4\}$ (czyli x_3 i x_4)

$x^0 = [0, 0, 8, 7]$

Przykład 1. cd.

Obliczamy

$$c_0 = c - A_0^T c_{B_0} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = c^T x^0 = 0.$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right]$$

Zbieramy te informacje do macierzy

$$Y_0 = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & \boxed{-1} & 1 & 0 & 8 \\ 1 & \boxed{0} & 0 & 1 & 7 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Czy $c_0 \le 0$? NIE, zatem wybieramy s tak, by

$$c_{o,s} = \max_j c_{o,j} = \max\{-2, 1, 0, 0\} = 1 \quad \Rightarrow \quad s = 2.$$ (druga kolumna)

zatem x_2 jest kandydatem do bazy

Badamy elementy $y_{i,s}$, $1 \le i \le 2$, - wszystkie są ≤ 0, co oznacza, że zadanie jest nieograniczone czyli funkcja celu rośnie nieograniczenie na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych.

KONIEC

METODA SYMPLEKS cd.

macierz współczynników

wektor ograniczeń

Obliczamy $c_0 = c - A_0^T c_{B_0}$, $z_0 = c^T x^0$ oraz tworzymy

$$Y_0 = [y_{ij}]_{(m+1)\times(n+1)} \quad Y_0 = \left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right].$$

wartość funkcji celu

współczynniki przy funkcji celu

Sprawdzamy **kryterium stopu**: $\boxed{\text{czy } c_0 \le 0?}$
Jeśli tak - to x^0 jest rozwiązaniem optymalnym.
Jeśli nie - to wybieramy $s \in \{1, \ldots, n\}$ tak, by

$$c_{o,s} = \max_{1 \le j \le n} c_{o,j},$$

a wtedy, jeśli wszystkie $y_{is} \le 0$, $1 \le i \le m$,, to zadanie jest nieograniczone; w przeciwnym razie wyznaczamy $r \in \{1, \ldots, m\}$ tak, by

$$\frac{y_{r,n+1}}{y_{r,s}} = \min\left\{\frac{y_{i,n+1}}{y_{i,s}} : \; y_{i,s} > 0\right\}$$

i przekształcamy układ do nowej postaci bazowej:
r-tą współrzędną wektora x_{B_0} zastępujemy przez x_s.

Przykład 2.
Rozważymy zadanie

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \ \rightarrow \ \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 &= 10, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

zmienimy kryterium optymalizacyjne na "max":

$$-2x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 \ \rightarrow \ \max$$

Mamy $c^T = [-2, -1, -3, -4]$ oraz $A = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & -1 & \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} \\ 3 & & 2 & \end{bmatrix}$.

Warunki zadania są w postaci bazowej względem bazy $\mathcal{B}_0 = \{2, 4\}$ i macierzy bazowej $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Zatem $A_0 = A, \quad b_0 = b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$, rozwiązaniem bazowym jest dopuszczalne $x^0 = [0, 6, 0, 10]^T$.

$$b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Przykład 2.

Rozważymy zadanie

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 = 10, \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

zmienimy kryterium optymalizacyjne na "max":

$$-2x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 \to \max$$

Mamy $c^T = [-2, -1, -3, -4]$ oraz $A = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{1} & -1 & \boxed{0} \\ 3 & \boxed{0} & 2 & \boxed{1} \end{bmatrix}$.

Warunki zadania są w postaci bazowej względem bazy $\mathcal{B}_0 = \{2, 4\}$ i macierzy bazowej $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Zatem $A_0 = A$, $b_0 = b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$, rozwiązaniem bazowym jest dopuszczalne $x^0 = [0, 6, 0, 10]^T$.

$$b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

chcemy

Przykład 2.

Rozważymy zadanie

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \;\to\; \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 = 10, \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

baza $\{i, j\}$

zmienimy kryterium optymalizacyjne na "max":

$$-2x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 \;\to\; \max$$

Mamy $c^T = [-2, -1, -3, -4]$ oraz $A = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{1} & -1 & \boxed{0} \\ 3 & \boxed{0} & 2 & \boxed{1} \end{bmatrix}$.

Warunki zadania są w postaci bazowej względem bazy $B_0 = \{2, 4\}$ i macierzy bazowej $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Zatem $A_0 = A$, $\quad b_0 = b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$, rozwiązaniem bazowym jest dopuszczalne $x^0 = [0, 6, 0, 10]^T$.

$$b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

chcemy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}$$

$$A_0 = \begin{array}{cccc} & x_i & & x_j \\ \left[\begin{matrix} \blacksquare & 1 & \blacksquare & 0 \\ \blacksquare & 0 & \blacksquare & 1 \end{matrix}\right. & & & \left.\right] \end{array}$$

baza $\{i, j\}$

Przykład 2.

Rozważymy zadanie

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \;\to\; \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 = 10, \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

zmienimy kryterium optymalizacyjne na "max":

$$-2x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 \;\to\; \max$$

Mamy $c^T = [-2, -1, -3, -4]$ oraz $A = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{1} & -1 & \boxed{0} \\ 3 & \boxed{0} & 2 & \boxed{1} \end{bmatrix}$.

Warunki zadania są w postaci bazowej względem bazy $B_0 = \{2, 4\}$ i macierzy bazowej $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Zatem $A_0 = A$, $\quad b_0 = b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$, rozwiązaniem bazowym jest dopuszczalne $x^0 = [0, 6, 0, 10]^T$.

u nas:

$$A = \begin{array}{cccc} \left[\begin{matrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{matrix}\right] \\ \quad\; x_2 \qquad x_4 \end{array}$$

$$b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

chcemy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}$$

$$A_0 = \begin{array}{cccc} & x_i & & x_j \\ \left[\begin{matrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right] \end{array}$$

baza $\{i, j\}$

Przykład 2.

Rozważymy zadanie

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 = 10, \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

zmienimy kryterium optymalizacyjne na "max":

$$-2x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 \to \max$$

Mamy $c^T = [-2, -1, -3, -4]$ oraz $A = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{1} & -1 & \boxed{0} \\ 3 & \boxed{0} & 2 & \boxed{1} \end{bmatrix}$.

Warunki zadania są w postaci bazowej względem bazy $B_0 = \{2, 4\}$ i macierzy bazowej $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Zatem $A_0 = A$, $b_0 = b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$, rozwiązaniem bazowym jest dopuszczalne $x^0 = [0, 6, 0, 10]^T$.

u nas:

$$A = \begin{array}{cccc} & x_2 & & x_4 \\ \left[\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right] \end{array}$$

$$b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

chcemy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}$$

$$A_0 = \begin{array}{cccc} & & & \\ \end{array}\begin{bmatrix} \blacksquare & 1 & \blacksquare & 0 \\ \blacksquare & 0 & \blacksquare & 1 \end{bmatrix}$$
$\quad x_i \qquad x_j$

baza $\{i, j\}$

Przykład 2.

Rozważymy zadanie

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 = 10, \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

zmienimy kryterium optymalizacyjne na "max":

$$-2x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 \to \max$$

Mamy $c^T = [-2, -1, -3, -4]$ oraz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Warunki zadania są w postaci bazowej względem bazy $B_0 = \{2, 4\}$ i macierzy bazowej $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Zatem $A_0 = A$, $b_0 = b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$, rozwiązaniem bazowym jest dopuszczalne $x^0 = [0, 6, 0, 10]^T$.

≥ 0

u nas:

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \qquad\quad x_2 \qquad\quad x_4 \end{array}$$

$x_1 = 0$

$x_3 = 0$

oraz

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = b_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad b_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{array}{c l} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \cdots 1 \\ \cdots 2 \\ \cdots 3 \\ \cdots 4 \end{array} \end{array} \qquad c_{B_0} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

indeksy

baza $B_0 = \{2,4\}$ (czyli x_2 i x_4)

$$x_0 = [0, 6, 0, 10]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right]$$

Przykład 2. cd.

Obliczamy $c_0 = c - A_0^T c_{B_0} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$z_0 = c^T x^0 = -46$. Tworzymy $Y_0 = \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & -1 & 0 & 6 \\ \boxed{3} & 0 & 2 & 1 & 10 \\ \hline 12 & 0 & 4 & 0 & -46 \end{array}\right]$.

Kryterium stopu $c_0 \leq 0$ nie jest spełnione, $x^0 = [0, 6, 0, 10]^T$ nie jest optymalny.

Ponieważ $\max\{12, 0, 4, 0\} = 12$, więc $s = 1$, badamy elementy $y_{1,1}$, $y_{2,1}$. Są dodatnie, zatem

$$x_s = x_1$$

wchodzi do bazy zamiast r-tego elementu z bazy $B_0 = \{2, 4\}$, gdzie r wybieramy badając

$$\min\left\{\frac{6}{2}, \frac{10}{3}\right\} = \frac{6}{2} \quad \Rightarrow \quad r = 1,$$

zmienna x_2 wychodzi z bazy.

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad b_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \dots 1 \\ \dots 2 \\ \dots 3 \\ \dots 4 \end{array} \end{array} \qquad c_{B_0} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

indeksy

baza $B_0 = \{2, 4\}$ (czyli x_2 i x_4)

$$x_0 = [0, 6, 0, 10]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right]$$

Przykład 2. cd.

Obliczamy $c_0 = c - A_0^T c_{B_0} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$z_0 = c^T x^0 = -46$. Tworzymy $Y_0 = \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & -1 & 0 & 6 \\ \boxed{3} & 0 & 2 & 1 & 10 \\ \hline 12 & 0 & 4 & 0 & -46 \end{array}\right]$.

Kryterium stopu $c_0 \leq 0$ nie jest spełnione, $x^0 = [0, 6, 0, 10]^T$ nie jest optymalny.

Ponieważ $\max\{12, 0, 4, 0\} = 12$, więc $s = 1$, badamy elementy $y_{1,1}$, $y_{2,1}$. Są dodatnie, zatem

$$x_s = x_1$$

wchodzi do bazy zamiast r-tego elementu z bazy $B_0 = \{2, 4\}$, gdzie r wybieramy badając

$$\min\left\{\frac{6}{2}, \frac{10}{3}\right\} = \frac{6}{2} \quad \Rightarrow \quad r = 1,$$

zmienna x_2 wychodzi z bazy.

(slajdy: dr Danuta Jaruszewska-Walczak)

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad b_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \dots 1 \\ \dots 2 \\ \dots 3 \\ \dots 4 \end{array} \qquad c_{B_0} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

indeksy

baza $B_0 = \{2, 4\}$ (czyli x_2 i x_4)

$$x_0 = [0, 6, 0, 10]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right]$$

Przykład 2. cd.

Obliczamy $c_0 = c - A_0^T c_{B_0} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$z_0 = c^T x^0 = -46$. Tworzymy $Y_0 = \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 10 \\ \hline 12 & 0 & 4 & 0 & -46 \end{array}\right]$.

Kryterium stopu $c_0 \leq 0$ nie jest spełnione, $x^0 = [0, 6, 0, 10]^T$ nie jest optymalny.

Ponieważ $\max\{12, 0, 4, 0\} = 12$, więc $s = 1$, badamy elementy $y_{1,1}$, $y_{2,1}$. Są dodatnie, zatem

$$x_s = x_1$$

wchodzi do bazy zamiast r-tego elementu z bazy $B_0 = \{2, 4\}$, gdzie r wybieramy badając

$$\min\left\{\frac{6}{2}, \frac{10}{3}\right\} = \frac{6}{2} \quad \Rightarrow \quad r = 1,$$

zmienna x_2 wychodzi z bazy.

(slajdy: dr Danuta Jaruszewska-Walczak)

$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad b_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$ $\quad c = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \dots 1 \\ \dots 2 \\ \dots 3 \\ \dots 4 \end{array}$ $\quad c_{B_0} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$

indeksy

baza $B_0 = \{2, 4\}$ (czyli x_2 i x_4)

$x_0 = [0, 6, 0, 10]$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right]$$

Przykład 2. cd.

Obliczamy $c_0 = c - A_0^T c_{B_0} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$z_0 = c^T x^0 = -46$. Tworzymy $Y_0 = \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 10 \\ \hline 12 & 0 & 4 & 0 & -46 \end{array}\right]$.

Kryterium stopu $c_0 \le 0$ nie jest spełnione, $x^0 = [0, 6, 0, 10]^T$ nie jest optymalny.

Ponieważ $\max\{12, 0, 4, 0\} = 12$, więc $s = 1$, badamy elementy $y_{1,1}$, $y_{2,1}$. Są dodatnie, zatem

$$x_s = x_1$$

wchodzi do bazy zamiast r-tego elementu z bazy $B_0 = \{2, 4\}$, gdzie r wybieramy badając

$$\min\left\{\frac{6}{2}, \frac{10}{3}\right\} = \frac{6}{2} \quad \Rightarrow \quad r = 1,$$

zmienna x_2 wychodzi z bazy.

$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $b_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$

$$c = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \dots 1 \\ \dots 2 \\ \dots 3 \\ \dots 4 \end{array} \qquad c_{B_0} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

indeksy

baza $B_0 = \{2, 4\}$ (czyli x_2 i x_4)

$x_0 = [0, 6, 0, 10]$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right]$$

Przykład 2. cd.

Obliczamy $c_0 = c - A_0^T c_{B_0} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$z_0 = c^T x^0 = -46$. Tworzymy $Y_0 = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 10 \\ \hline 12 & 0 & 4 & 0 & -46 \end{array}\right]$.

Kryterium stopu $c_0 \leq 0$ nie jest spełnione, $x^0 = [0, 6, 0, 10]^T$ nie jest optymalny.

Ponieważ $\max\{12, 0, 4, 0\} = 12$, więc $s = 1$, badamy elementy $y_{1,1}$, $y_{2,1}$. Są dodatnie, zatem

(pierwsza kolumna) zatem x_1 jest kandydatem do bazy

$$x_s = x_1$$

wchodzi do bazy zamiast r-tego elementu z bazy $B_0 = \{2, 4\}$, gdzie r wybieramy badając

$$\min\left\{\frac{6}{2}, \frac{10}{3}\right\} = \frac{6}{2} \quad \Rightarrow \quad r = 1,$$

zmienna x_2 wychodzi z bazy.

$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $b_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$

$c = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \dots 1 \\ \dots 2 \\ \dots 3 \\ \dots 4 \end{array}$ indeksy $\quad c_{B_0} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$

baza $B_0 = \{2, 4\}$ (czyli x_2 i x_4)

$x_0 = [0, 6, 0, 10]$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right]$$

Przykład 2. cd.

Obliczamy $c_0 = c - A_0^T c_{B_0} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$z_0 = c^T x^0 = -46$. Tworzymy $Y_0 = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 10 \\ \hline 12 & 0 & 4 & 0 & -46 \end{array}\right]$.

Kryterium stopu $c_0 \leq 0$ nie jest spełnione, $x^0 = [0, 6, 0, 10]^T$ nie jest optymalny.

Ponieważ $\max\{12, 0, 4, 0\} = 12$, więc $s = 1$, badamy elementy $y_{1,1}$, $y_{2,1}$.

(pierwsza kolumna) zatem x_1 jest kandydatem do bazy

Są dodatnie, zatem

$$x_s = x_1$$

wchodzi do bazy zamiast r-tego elementu z bazy $B_0 = \{2, 4\}$, gdzie r wybieramy badając

$$\min\left\{\frac{6}{2}, \frac{10}{3}\right\} = \frac{6}{2} \quad \Rightarrow \quad r = 1,$$

zmienna x_2 wychodzi z bazy.

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad b_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots 1 \\ \dots 2 \\ \dots 3 \\ \dots 4 \end{matrix} \qquad c_{B_0} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

indeksy

baza $B_0 = \{2,4\}$ (czyli x_2 i x_4)

$$x_0 = [0, 6, 0, 10]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right]$$

Przykład 2. cd.

Obliczamy $c_0 = c - A_0^T c_{B_0} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$z_0 = c^T x^0 = -46$. Tworzymy $Y_0 = \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & -1 & 0 & 6 \\ \boxed{3} & 0 & 2 & 1 & \boxed{10} \\ \hline 12 & 0 & 4 & 0 & -46 \end{array}\right]$ $\begin{matrix} 6/2 \leftarrow \text{min!} \\ 10/3 \end{matrix}$

Kryterium stopu $c_0 \leq 0$ nie jest spełnione, $x^0 = [0, 6, 0, 10]^T$ nie jest optymalny.

Ponieważ $\max\{12, 0, 4, 0\} = 12$, więc $s = 1$, badamy elementy $y_{1,1}$, $y_{2,1}$. Są dodatnie, zatem

(pierwsza kolumna) zatem x_1 jest kandydatem do bazy

$$x_s = x_1$$

wchodzi do bazy zamiast r-tego elementu z bazy $B_0 = \{2, 4\}$, gdzie r wybieramy badając

$$\min\left\{\frac{6}{2}, \frac{10}{3}\right\} = \frac{6}{2} \Rightarrow r = 1,$$

(pierwszy indeks w bazie)

zmienna x_2 wychodzi z bazy.

(slajdy: dr Danuta Jaruszewska-Walczak)

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad b_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \dots 1 \\ \dots 2 \\ \dots 3 \\ \dots 4 \end{array} \qquad c_{B_0} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

indeksy

baza $B_0 = \{2, 4\}$ (czyli x_2 i x_4)

$$x_0 = [0, 6, 0, 10]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline c_0^T & z_0 \end{array}\right]$$

Przykład 2. cd.

Obliczamy $c_0 = c - A_0^T c_{B_0} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$z_0 = c^T x^0 = -46$. Tworzymy $Y_0 = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 10 \\ \hline 12 & 0 & 4 & 0 & -46 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} 6/2 \leftarrow \text{min!} \\ 10/3 \end{array}$

Kryterium stopu $c_0 \leq 0$ nie jest spełnione, $x^0 = [0, 6, 0, 10]^T$ nie jest optymalny.

Ponieważ $\max\{12, 0, 4, 0\} = 12$, więc $s = 1$, badamy elementy $y_{1,1}$, $y_{2,1}$.

(pierwsza kolumna) zatem x_1 jest kandydatem do bazy

Są dodatnie, zatem

$$x_s = x_1$$

wchodzi do bazy zamiast r-tego elementu z bazy $B_0 = \{2, 4\}$, gdzie r wybieramy badając

$$\min\left\{\frac{6}{2}, \frac{10}{3}\right\} = \frac{6}{2} \Rightarrow r = 1,$$

(pierwszy indeks w bazie)

zmienna x_2 wychodzi z bazy.

(slajdy: dr Danuta Jaruszewska-Walczak)

chcemy mieć

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [illegible] & [illegible] \\ [illegible] & [illegible] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [illegible] \\ [illegible] \end{bmatrix}}$$

zmienne x_1 oraz x_4

$$c = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{indeksy} \\ \cdots 1 \\ \cdots 2 \\ \cdots 3 \\ \cdots 4 \end{array} \qquad c_{B_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Przykład 2. cd.

Nowa baza to $\mathcal{B}_1 = \{1, 4\}$. Przekształcamy układ do nowej postaci bazowej i przygotujemy Y_1:

$$[A_0 \,|\, b_0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right] \overset{w_1/2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right] \overset{w_3 - 3\cdot w_1}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3 \\ 0 & -3/2 & 7/2 & 1 & 1 \end{array}\right] = [A_1 \,|\, b_1], \quad x^1 = [3, 0, 0, 1]^T,$$

$$c_1 = c - A_1^T c_{B_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & -3/2 \\ -1/2 & 7/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$z_1 = c^T x^1 = -10, \quad Y_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & \boxed{-1/2} & 0 & 3 \\ 0 & -3/2 & \boxed{7/2} & 1 & 1 \\ \hline 0 & -6 & 10 & 0 & -10 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline c_1^T & z_1 \end{array}\right]$$

Kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny, $\max\{0, -6, 10, 0\} = 10$ dla $s = 3$ czyli x_3 wchodzi do bazy, a $\min\{2/7\} = 2/7$ dla $r = 2$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

chcemy mieć

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cdot\\ \cdot\end{bmatrix}}$$

zmienne x_1 oraz x_4

$$c=\begin{bmatrix}-2\\-1\\-3\\-4\end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{układ}\\ \text{--- } 1\\ \text{--- } 2\\ \text{--- } 3\\ \text{--- } 4\end{array} \qquad c_{B_1}=\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$$

Przykład 2. cd.

Nowa baza to $\mathcal{B}_1=\{1,4\}$. Przekształcamy układ do nowej postaci bazowej i przygotujemy Y_1:

$$[A_0\,|\,b_0]=\left[\begin{array}{cccc|c}2 & 1 & -1 & 0 & 6\\ 3 & 0 & 2 & 1 & 10\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3\\ 3 & 0 & 2 & 1 & 10\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3\\ 0 & -3/2 & 7/2 & 1 & 1\end{array}\right]=[A_1\,|\,b_1],\qquad x^1=[3,0,0,1]^T,$$

$$c_1=c-A_1^Tc_{B_1}=\begin{bmatrix}-2\\-1\\-3\\-4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/2 & -3/2\\ -1/2 & 7/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-6\\10\\0\end{bmatrix},$$

$$z_1=c^Tx^1=-10,\quad Y_1=\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3\\ 0 & -3/2 & 7/2 & 1 & 1\\ \hline 0 & -6 & 10 & 0 & -10\end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{c|c}A_1 & b_1\\ \hline c_1^T & z_1\end{array}\right]$$

Kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny,
$\max\{0,-6,10,0\}=10$ dla $s=3$ czyli x_3 wchodzi do bazy,
a $\min\{2/7\}=2/7$ dla $r=2$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

chcemy mieć

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}}$$

$$c = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{--- } 1 \\ \text{--- } 2 \\ \text{--- } 3 \\ \text{--- } 4 \end{array} \quad \text{indeksy} \qquad c_{B_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

zmienne x_1 oraz x_4

Przykład 2. cd.

Nowa baza to $\mathcal{B}_1 = \{1, 4\}$. Przekształcamy układ do nowej postaci bazowej i przygotujemy Y_1:

$$[A_0 \,|\, b_0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}1/2\\-3/2\end{matrix} & \begin{matrix}-1/2\\7/2\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}3\\1\end{matrix} \end{array}\right] = [A_1 \,|\, b_1], \quad x^1 = [3, 0, 0, 1]^T,$$

$$c_1 = c - A_1^T c_{B_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & -3/2 \\ -1/2 & 7/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$z_1 = c^T x^1 = -10, \quad Y_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3 \\ 0 & -3/2 & 7/2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -6 & 10 & 0 & -10 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline c_1^T & z_1 \end{array}\right]$$

Kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny, $\max\{0, -6, 10, 0\} = 10$ dla $s = 3$ czyli x_3 wchodzi do bazy, a $\min\{2/7\} = 2/7$ dla $r = 2$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

chcemy mieć

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{indeksy} \\ \cdots 1 \\ \cdots 2 \\ \cdots 3 \\ \cdots 4 \end{array} \qquad c_{B_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

zmienne x_1 oraz x_4

Przyklad 2. cd.

Nowa baza to $\mathcal{B}_1 = \{1, 4\}$. Przekształcamy układ do nowej postaci bazowej i przygotujemy Y_1:

$$[A_0 \,|\, b_0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3 \\ 0 & -3/2 & 7/2 & 1 & 1 \end{array}\right] = [A_1 \,|\, b_1], \quad x^1 = [3, 0, 0, 1]^T,$$

$$c_1 = c - A_1^T c_{B_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & -3/2 \\ -1/2 & 7/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$z_1 = c^T x^1 = -10, \quad Y_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3 \\ 0 & -3/2 & 7/2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -6 & 10 & 0 & -10 \end{array}\right].$$

Kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny, $\max\{0, -6, 10, 0\} = 10$ dla $s = 3$ czyli x_3 wchodzi do bazy, a $\min\{2/7\} = 2/7$ dla $r = 2$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline c_1^T & z_1 \end{array}\right]$$

chcemy mieć

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}}$$

zmienne x_1 oraz x_4

$$c=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}-2\\-1\\-3\\-4\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{indeksy}\\ \text{--- } 1\\ \text{--- } 2\\ \text{--- } 3\\ \text{--- } 4\end{array}\qquad c_{B_1}=\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$$

Przykład 2. cd.

Nowa baza to $\mathcal{B}_1=\{1,4\}$. Przekształcamy układ do nowej postaci bazowej i przygotujemy Y_1:

$$[A_0\,|\,b_0]=\left[\begin{array}{cccc|c}2&1&-1&0&6\\3&0&2&1&10\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&1/2&-1/2&0&3\\3&0&2&1&10\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c}\boxed{1}&1/2&-1/2&\boxed{0}&3\\\boxed{0}&-3/2&7/2&\boxed{1}&1\end{array}\right]=[A_1\,|\,b_1],\qquad x^1=[3,0,0,1]^T,$$

$$c_1=c-A_1^Tc_{B_1}=\begin{bmatrix}-2\\-1\\-3\\-4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\1/2&-3/2\\-1/2&7/2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-6\\10\\0\end{bmatrix},$$

$$z_1=c^Tx^1=-10,\qquad Y_1=\left[\begin{array}{cccc|c}1&1/2&-1/2&0&3\\0&-3/2&7/2&1&1\\\hline 0&-6&10&0&-10\end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{c|c}A_1&b_1\\\hline c_1^T&z_1\end{array}\right]$$

Kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny, $\max\{0,-6,10,0\}=10$ dla $s=3$ czyli x_3 wchodzi do bazy, a $\min\{2/7\}=2/7$ dla $r=2$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

$s=3$ jest to numer kolumny, czyli zmienne x_3

chcemy mieć

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\square & \square\\ \square & \square\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\square\\ \square\end{bmatrix}}$$

→ zmienne x_1 oraz x_4

$$c=\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix}-2\\ -1\\ -3\\ -4\end{bmatrix} & \begin{matrix}\text{indeksy}\\ \cdots 1\\ \cdots 2\\ \cdots 3\\ \cdots 4\end{matrix}\end{array} \qquad c_{B_1}=\begin{bmatrix}-2\\ -4\end{bmatrix}$$

Przykład 2. cd.

Nowa baza to $\mathcal{B}_1=\{1,4\}$. Przekształcamy układ do nowej postaci bazowej i przygotujemy Y_1:

$$[A_0\,|\,b_0]=\left[\begin{array}{cccc|c}2 & 1 & -1 & 0 & 6\\ 3 & 0 & 2 & 1 & 10\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3\\ 3 & 0 & 2 & 1 & 10\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3\\ 0 & -3/2 & 7/2 & 1 & 1\end{array}\right]=[A_1\,|\,b_1],\qquad x^1=[3,0,0,1]^T,$$

$$c_1=c-A_1^Tc_{B_1}=\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ -3\\ -4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/2 & -3/2\\ -1/2 & 7/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -6\\ 10\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & b_1\\ \hline c_1^T & z_1\end{array}\right]$$

$$z_1=c^Tx^1=-10,\qquad Y_1=\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3\\ 0 & -3/2 & 7/2 & 1 & 1\\ \hline 0 & -6 & 10 & 0 & -10\end{array}\right].$$

← nie sprawdzamy bo $-\frac{1}{2}\le 0$

Kryterium stopu nie zachodzi, x^1 nie jest optymalny, $\max\{0,-6,10,0\}=10$ dla $s=3$ czyli x_3 wchodzi do bazy, a $\min\{2/7\}=2/7$ dla $r=2$, zatem x_4 wychodzi z bazy.

$s=3$ jest to numer kolumny, czyli zmienna x_3

↑ $r=2$ jest to numer indeksu, zatem indeks $=4$, czyli zmienna x_4

chcemy mieć

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}}$$

$$c = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{indeksy} \\ \cdots 1 \\ \cdots 2 \\ \cdots 3 \\ \cdots 4 \end{array} \qquad c_{B_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

zmienne x_1 oraz x_3

Przykład 2. cd.

Kolejna baza to $\mathcal{B}_2 = \{1, 3\}$. Wtedy

$$[\,A_1\,|\,b_1\,] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3 \\ 0 & -3/2 & 7/2 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{w_2/\frac{7}{2}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3 \\ 0 & -3/7 & 1 & 2/7 & 2/7 \end{array}\right] \overset{w_1 + \frac{1}{2}\cdot w_2}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2/7 & \boxed{0} & 1/7 & 22/7 \\ \boxed{0} & -3/7 & \boxed{1} & 2/7 & 2/7 \end{array}\right] = [\,A_2\,|\,b_2\,], \qquad x^2 = [22/7,\ 0,\ 2/7,\ 0]^T,$$

$$c_2 = c - A_2^T c_{B_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2/7 & -3/7 \\ 0 & 1 \\ 1/7 & 2/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -12/7 \\ 0 \\ -20/7 \end{bmatrix},$$

$$z_2 = c^T x^2 = -50/7.$$

Kryterium stopu $c_2 \leq 0$ zachodzi, $\boxed{x^2 \text{ jest optymalny}}$ dla zadania

$-x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 \ \rightarrow\ $ max czyli też dla

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \ \rightarrow\ \min$$

z minimalną wartością funkcji celu $z_{min} = 50/7$.

$$\left[\begin{array}{c|c} A_2 & b_2 \\ \hline c_2^T & z_2 \end{array}\right]$$

(slajdy: dr Danuta Jaruszewska-Walczak)

chcemy mieć

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\square & \square\\ \square & \square\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_2\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\square\\ \square\end{bmatrix}}$$

$$c=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ -3\\ -4\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{indeksy}\\ \cdots 1\\ \cdots 2\\ \cdots 3\\ \cdots 4\end{array}\qquad c_{B_2}=\begin{bmatrix}-2\\ -3\end{bmatrix}$$

zmienne x_1 oraz x_3

Przykład 2. cd.

Kolejna baza to $\mathcal{B}_2=\{1,3\}$. Wtedy

$$[A_1\,|\,b_1]=\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3\\ 0 & -3/2 & 7/2 & 1 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3\\ 0 & -3/7 & 1 & 2/7 & 2/7\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c}\boxed{1} & 2/7 & \boxed{0} & 1/7 & 22/7\\ \boxed{0} & -3/7 & \boxed{1} & 2/7 & 2/7\end{array}\right]=[A_2\,|\,b_2],\qquad x^2=[22/7,\ 0,\ 2/7,\ 0]^T,$$

$$c_2=c-A_2^Tc_{B_2}=\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ -3\\ -4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2/7 & -3/7\\ 0 & 1\\ 1/7 & 2/7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -12/7\\ 0\\ -20/7\end{bmatrix},$$

$$z_2=c^Tx^2=-50/7.$$

$$\left[\begin{array}{c|c}A_2 & b_2\\ \hline c_2^T & z_2\end{array}\right]$$

Kryterium stopu $c_2\le 0$ zachodzi, $\boxed{x^2 \text{ jest optymalny}}$ dla zadania
$-x_1-x_2-3x_3-4x_4\ \to\ \max$ czyli też dla

$$x_1+x_2+3x_3+4x_4\ \to\ \min$$

z minimalną wartością funkcji celu $z_{min}=50/7$.

chcemy mieć

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}}$$

zmienne x_1 oraz x_3

$$c = \begin{array}{c} \text{indeksy} \\ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \cdots 1 \\ \cdots 2 \\ \cdots 3 \\ \cdots 4 \end{array} \end{array} \qquad c_{B_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Przykład 2. cd.

Kolejna baza to $\mathcal{B}_2 = \{1, 3\}$. Wtedy

$$[A_1 \,|\, b_1] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3 \\ 0 & -3/2 & 7/2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3 \\ 0 & -3/7 & 1 & 2/7 & 2/7 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2/7 & \boxed{0} & 1/7 & 22/7 \\ \boxed{0} & -3/7 & \boxed{1} & 2/7 & 2/7 \end{array}\right] = [A_2 | b_2], \qquad x^2 = [22/7,\ 0,\ 2/7,\ 0]^T,$$

$$c_2 = c - A_2^T c_{B_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2/7 & -3/7 \\ 0 & 1 \\ 1/7 & 2/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -12/7 \\ 0 \\ -20/7 \end{bmatrix},$$

$$z_2 = c^T x^2 = -50/7.$$

Kryterium stopu $c_2 \leq 0$ zachodzi, $\boxed{x^2 \text{ jest optymalny}}$ dla zadania $-x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 \ \rightarrow$ max czyli też dla

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \ \rightarrow \ \min$$

z minimalną wartością funkcji celu $z_{min} = 50/7$.

$$\left[\begin{array}{c|c} A_2 & b_2 \\ \hline c_2^T & z_2 \end{array}\right]$$

chcemy mieć

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}}$$

$$c = \begin{array}{cl} & \text{indeksy} \\ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \cdots 1 \\ \cdots 2 \\ \cdots 3 \\ \cdots 4 \end{array} \end{array} \qquad c_{B_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

zmienne x_1 oraz x_3

Przykład 2. cd.

Kolejna baza to $\mathcal{B}_2 = \{1, 3\}$. Wtedy

$$[A_1 \,|\, b_1] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3 \\ 0 & -3/2 & 7/2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3 \\ 0 & -3/7 & 1 & 2/7 & 2/7 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2/7 & 0 & 1/7 & 22/7 \\ 0 & -3/7 & 1 & 2/7 & 2/7 \end{array}\right] = [A_2 \,|\, b_2], \qquad x^2 = [22/7,\ 0,\ 2/7,\ 0]^T,$$

$$c_2 = c - A_2^T c_{B_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2/7 & -3/7 \\ 0 & 1 \\ 1/7 & 2/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -12/7 \\ 0 \\ -20/7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \le 0 \\ \le 0 \\ \le 0 \\ \le 0 \end{array},$$

$$z_2 = c^T x^2 = -50/7.$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_2 & b_2 \\ \hline c_2^T & z_2 \end{array}\right]$$

! $c_2 \le 0$

Kryterium stopu $c_2 \le 0$ zachodzi, $\boxed{x^2 \text{ jest optymalny}}$ dla zadania $-x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 \ \to$ max czyli też dla

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \ \to \ \min$$

z minimalną wartością funkcji celu $z_{min} = 50/7$.

KONIEC

(slajdy: dr Danuta Jaruszewska-Walczak)

Uwaga. Metoda sympleks dla zadania z kryterium minimalizacji

$$c^T x \;\rightarrow\; \text{min}$$

$$Ax = b, \quad x \geq 0,$$

różni się od metody sympleks dla zadania z maksymalizacją następującymi elementami:

- kryterium stopu będzie warunek $\boxed{c_0 \geq 0}$,

- wybór $s \in \{1, \ldots, n\}$ jest taki, że

$$c_{o,s} = \boxed{\min}_{1 \leq j \leq n} c_{o,j}.$$

Zadanie z Przykładu 2 można rozwiązać bez wymiany kryterium optymalizacyjnego [ćwiczenie samodzielne].