PROGRAMOWANIE MATEMATYCZNE

PROBLEM 1. Pewien zakład produkuje na eksport wyroby W_1, W_2 oraz W_3 z materiałów M_1 oraz M_2.

materiał	W_1	W_2	W_3	zasoby materiału
M_1	1	2	1	30
M_2	1	4	2	60
cena USD/jedn.	50	25	10	
koszt PLN/jedn.	80	50	30	

Interesuje nas maksymalizacja stosunku zysku w USD do nakładu w PLN.

materiał	W_1	W_2	W_3	zasoby materiału
M_1	1	2	1	30
M_2	1	4	2	60
cena USD/jedn.	50	25	10	
koszt PLN/jedn.	80	50	30	

Niech zmienne x_1, x_2 oraz x_3 oznaczają odpowiednio wysokość produkcji wyrobów W_1, W_2 oraz W_3.

$$\begin{array}{rrcl}
\text{zmaksymalizować} & \frac{50x_1+25x_2+10x_3}{80x_1+50x_2+30x_3} & & \\
\text{przy zachowaniu warunków} & x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 30 \\
& x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \leq & 60 \\
& x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Funkcja celu nie jest funkcją liniową.

PROGRAMOWANIE MATEMATYCZNE

PROBLEM 2. Poniższa tabela przedstawia wpływ nagłaśniania poszczególnych haseł na wyborców. Każda wartość oznacza liczbę tysięcy głosów w rejonach białym, czerwonym albo niebieskim, które można zyskać, wydając 1000 PLN na reklamę popierania danej kwestii. Wartości ujemne oznaczają utracone głosy.

HASŁO	biały	czerwony	niebieski
rozbudowa dróg	-2	5	3
kontrola dostępu do broni	8	2	-5
zakaz sprzedaży alkoholu	0	0	10
podatek cukrowy	10	0	-2

Interesuje nas określenie minimalnej kwoty potrzebnej do uzyskania 50 000 głosów w rejonie białym, 100 000 głosów w rejonie czerwonym i 25 000 głosów w rejonie niebieskim.

HASŁO	biały	czerwony	niebieski
rozbudowa dróg	-2	5	3
kontrola dostępu do broni	8	2	-5
zakaz sprzedaży alkoholu	0	0	10
podatek cukrowy	10	0	-2

Niech zmienne x_1, x_2, x_3 oraz x_4 oznaczają odpowiednio wysokość środków wydanych na reklamę odpowiedniego hasła.

$$
\begin{array}{rrcl}
\text{zminimalizować} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & & \\
\text{przy zachowaniu warunków} & -2x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 10x_4 & \geq & 50000 \\
& 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 & \geq & 100000 \\
& 3x_1 - 5x_2 + 10x_3 - 2x_4 & \geq & 25000 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Funkcja celu jest funkcją liniową.

PROGRAMOWANIE MATEMATYCZNE

ZAŁOŻENIA/DANE

- funkcja $f : D_0 \to R$, gdzie $D_0 \subseteq R^n$;
- funkcje $g_i : D_i \to R$, gdzie $D_i \subseteq R^n$, $i = 1, \ldots, m$;
- wektor ograniczeń $\mathbf{b} = (b_i)$ wymiaru m, tj. wektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

WARUNKI I

- $g_i(\mathbf{x}) = b_i$, $i = 1, \ldots, m_1$;
- $g_i(\mathbf{x}) \geq b_i$, $i = m_1 + 1, \ldots, m_2$;
- $g_i(\mathbf{x}) \leq b_i$, $i = m_2 + 1, \ldots, m$, gdzie $\mathbf{x}$ jest wektorem wymiaru n, tj. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

WARUNKI II

- $x_j \geq 0$, $i = 1, \ldots, n_1$;
- $x_j \leq 0$, $j = n_1 + 1, \ldots, n$.

ZADANIE OPTYMALIZACYJNE

- wyznaczyć $\mathbf{x}$ spełniające warunki I-II i takie, że funkcja f osiąga minimum w $\mathbf{x}$.

PROGRAMOWANIE LINIOWE

- Sformułowanie zagadnienia
- Algorytm Simplex
- Problem dualny
- Całkowitoliczbowe programowanie liniowe
- Przykłady zastosowań
- Algorytmy/Narzędzia

PROGRAMOWANIE LINIOWE

POSTAĆ KANONICZNA

- n liczb rzeczywistych $c_1, c_2, \ldots, c_n$;
- m liczb rzeczywistych $b_1, b_2, \ldots, b_m$;
- mn liczb rzeczywistych a_{ij} dla $i = 1, \ldots, m$ oraz $j = 1, \ldots, n$.

ZADANIE OPTYMALIZACYJNE

$$\begin{array}{rrcll} \text{zmaksymalizować} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\ \text{przy zachowaniu warunków} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_j & \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j & \geq & 0 & \text{dla } j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

ZADANIE OPTYMALIZACYJNE (bardziej formalna postać)

$$\begin{array}{rrcl} \text{zmaksymalizować} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} & & \\ \text{przy zachowaniu warunków} & A\mathbf{x} & \leq & \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} & \geq & 0 \end{array}$$

gdzie $\mathbf{c} = (c_j)$ jest wektorem wymiaru n, $\mathbf{x} = (x_j)$ jest wektorem wymiaru n, $A = (a_{ij})$ jest macierzą wymiaru $m \times n$ oraz $\mathbf{b} = (b_i)$ jest wektorem wymiaru m.

POSTAĆ NIEKANONICZNA

$$\begin{array}{rrcl} \text{zminimalizować} & -2x_1 + 3x_2 & & \\ \text{przy zachowaniu warunków} & x_1 + x_2 & = & 7 \\ & x_1 - 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & \geq & 0 \end{array}$$

POSTAĆ KANONICZNA (równoważna, gdy $x_2 = x_3 - x_4$)

$$\begin{array}{rrcl} \text{zmaksymalizować} & 2x_1 - 3x_3 + 3x_4 & & \\ \text{przy zachowaniu warunków} & x_1 + x_3 - x_4 & \leq & 7 \\ & -x_1 - x_3 + x_4 & \leq & -7 \\ & x_1 - 2x_3 + 2x_4 & \leq & 4 \\ & x_1, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

POSTAĆ KANONICZNA (bardziej formalna postać)

$$\begin{array}{rrcl} \text{zmaksymalizować} & \mathbf{c}^T\mathbf{x} & & \\ \text{przy zachowaniu warunków} & A\mathbf{x} & \leq & \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} & \geq & 0 \end{array}$$

gdzie $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$.

POSTAĆ NIEKANONICZNA vs POSTAĆ KANONICZNA

Każde zadanie programowania liniowego (bardziej ogólnie — matematycznego) można sprowadzić do postaci kanonicznej.

- minimalizację funkcji f
  zastępujemy maksymalizacją funkcji $-f$;
- zmienną x_j z ograniczeniem $x_j \leq 0$
  zastępujemy przez zmienną $x'_j = -x_j$ z ograniczeniem $x'_j \geq 0$;
- gdy brak ograniczenia znaku zmiennej x_j,
  to wprowadzamy dwie zmienne $x_j^+, x_j^- \geq 0$ i podstawiamy $x_j = x_j^+ - x_j^-$;
- równość $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j$
  zastępujemy układem nierówności $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_j$ oraz $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_j$;
- nierówność $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_j$
  zastępujemy nierównością $-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq -b_j$;

POSTAĆ NIEKANONICZNA

$$\begin{array}{rrcl} \text{zminimalizować} & -2x_1 + 3x_2 & & \\ \text{przy zachowaniu warunków} & x_1 + x_2 & = & 7 \\ & x_1 - 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & \geq & 0 \end{array}$$

POSTAĆ KANONICZNA (równoważna, gdy $x_2 = x_3 - x_4$)

$$\begin{array}{rrcl} \text{zmaksymalizować} & 2x_1 - 3x_3 + 3x_4 & & \\ \text{przy zachowaniu warunków} & x_1 + x_3 - x_4 & \leq & 7 \\ & -x_1 - x_3 + x_4 & \leq & -7 \\ & x_1 - 2x_3 + 2x_4 & \leq & 4 \\ & x_1, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

POSTAĆ KANONICZNA vs POSTAĆ STANDARDOWA

POSTAĆ STANDARDOWA

- n liczb rzeczywistych $c_1, c_2, \ldots, c_n$;
- m liczb rzeczywistych $b_1, b_2, \ldots, b_m$;
- mn liczb rzeczywistych a_{ij} dla $i = 1, \ldots, m$ oraz $j = 1, \ldots, n$.

ZADANIE OPTYMALIZACYJNE

$$
\begin{array}{rrcll}
\text{zmaksymalizować} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
\text{przy zachowaniu warunków} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = & b_j & \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \\
 & x_j & \geq & 0 & \text{dla } j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

ZADANIE OPTYMALIZACYJNE (bardziej formalna postać)

$$
\begin{array}{rrcl}
\text{zmaksymalizować} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} & & \\
\text{przy zachowaniu warunków} & A\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} & \geq & 0
\end{array}
$$

gdzie $\mathbf{c} = (c_j)$ jest wektorem wymiaru n, $\mathbf{x} = (x_j)$ jest wektorem wymiaru n, $A = (a_{ij})$ jest macierzą wymiaru $m \times n$ oraz $\mathbf{b} = (b_i)$ jest wektorem wymiaru m.

POSTAĆ KANONICZNA vs POSTAĆ STANDARDOWA

Każde zadanie programowania liniowego (bardziej ogólnie — matematycznego) można sprowadzić do postaci standardowej.

- ...
- nierówność $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_j$ zastępujemy równością $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+j} = b_j$;
  - ▷ wprowadzamy zmienną uzupełnieniową x_{n+j} z ograniczeniem $x_{n+j} \geq 0$;
  - ▷ funkcję celu zastępujemy funkcją $f(\mathbf{x}) + 0 \cdot x_{n+j}$.

POSTAĆ KANONICZNA

$$\begin{array}{rrcl} \text{zmaksymalizować} & 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 & & \\ \text{przy zachowaniu warunków} & x_1 + x_2 - x_3 & \leq & 7 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 & \leq & -7 \\ & x_1 - 2x_2 + 2x_3 & \leq & 4 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

POSTAĆ STANDARDOWA

$$\begin{array}{rrcl} \text{zmaksymalizować} & 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 & & \\ \text{przy zachowaniu warunków} & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 7 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 + x_5 & = & -7 \\ & x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_6 & = & 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

PROGRAMOWANIE LINIOWE

- Sformułowanie zagadnienia
- Algorytm Simplex
- Problem dualny
- Całkowitoliczbowe programowanie liniowe
- Przykłady zastosowań
- Algorytmy/Narzędzia

History of LP

slides by Andy Mirzaian

- 3000-200 BC: Egypt, Babylon, India, China, Greece:[geometry & algebra]
  - Egypt: polyhedra & pyramids.
  - India: Sulabha suutrah (Easy Solution Procedures) [2 equations, 2 unknowns]
  - China: Jiuzhang suanshu (9 Chapters on the Mathematical Art) [Precursor of Gauss-Jordan elimination method on linear equations]
  - Greece: Pythagoras, Euclid, Archimedes, …
- 825 AD: Persia: Muhammad ibn-Musa Alkhawrazmi (author of 2 influential books):
  "Al-Maqhaleh fi Hisab al-jabr w'almoqhabeleh" (An essay on Algebra and equations)
  "Kitab al-Jam'a wal-Tafreeq bil Hisab al-Hindi" (Book on Hindu Arithmetic).
  originated the words algebra & algorithm for solution procedures of algebraic systems.

- Fourier [1826], Motzkin [1933] [Fourier-Motzkin elimination method on linear inequalities]
- Minkowski [1896], Farkas [1902], De la Vallée Poussin [1910], von Neumann [1930's], Kantorovich [1939], Gale [1960] [LP duality theory & precursor of Simplex]

- George Dantzig [1947]: **Simplex algorithm.**
  Exponential time in the worst case, but effective in practice.
- Leonid Khachiyan [1979]: **Ellipsoid algorithm.**
  The first weakly polynomial-time LP algorithm: poly(n,d,L).
- Narendra Karmarkar [1984]: **Interior Point Method.**
  Also weakly polynomial-time. IPM variations are very well studied.
- Megiddo-Dyer [1984]: **Prune-&-Search method.**
  O(n) time if the dimension is a fixed constant. Super-exponential on dimension.